

DETERMINAÇÃO DE MATRIZES O-D SINTÉTICAS A PARTIR DE CONTAGENS VOLUMÉTRICAS

Sergio Henrique Demarchi
Bruno Vieira Bertoncini

Universidade Estadual de Maringá
Departamento de Engenharia Civil
Grupo de Engenharia de Transportes

RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar a fundamentação teórica referente à determinação de matrizes origem-destino (OD) a partir de contagens volumétricas obtidas nas vias de uma rede de tráfego, além de propor um procedimento para elaborar as equações que relacionam volumes e quantidade de viagens em formato matricial, o que facilita a montagem e resolução do sistema de equações através de planilhas eletrônicas ou rotinas computacionais. O método apresentado baseia-se numa das formulações existentes na literatura, adaptada de forma a possibilitar a estimativa de viagens para o caso em que existe mais de uma rota entre um par O-D. Dois exemplos de redes simples são apresentados, para os quais as viagens são estimadas através do Solver do Excel. O método descrito pode ser útil não só em termos práticos da solução do problema da estimativa de matrizes O-D sintéticas, mas também de grande valia para uma melhor compreensão da fundamentação teórica relativa ao assunto, o que aumenta a capacidade de análise e interpretação dos resultados obtidos.

ABSTRACT

The purpose of this paper is to describe the theoretical background of synthetic O-D generation based on traffic counts and to propose a basic procedure for set up and implementation of a system of equations relating volumes and number of trips in matricial format, which is useful for solving the system in electronic spreadsheets or computational routines. The method described in this paper is based on a formulation found on literature, slightly modified to estimate trips for the multi-path case. In order to show an application of the method, synthetic O-D's are determined for two small networks by means of Excel Solver. The method described is useful not only for practical purposes of solving the problem of O-D estimation, but also for providing a better comprehension of the theoretical background, which considerably expands the ability of interpreting and analyzing the results.

1. INTRODUÇÃO

Uma das etapas de grande importância nas análises e estudos de planejamento e operação do sistema viário é a determinação da quantidade de deslocamentos realizados entre pontos de uma cidade ou região, em decorrência da necessidade de se realizar atividades por motivo trabalho, estudo ou lazer. Tradicionalmente, o número de viagens entre diferentes locais é expresso em matrizes bidimensionais, denominadas matrizes origem-destino (O-D), na qual cada elemento da matriz representa o número de viagens entre uma origem e um destino específicos.

De acordo com Cascetta (1984), existem três métodos para a determinação de matrizes O-D. O primeiro método consiste em estimar o número de viagens de cada célula da matriz diretamente a partir de entrevistas domiciliares, entrevistas em locais da própria rede viária, monitoramento de veículos, ou alguma combinação dos procedimentos mencionados. O segundo método baseia-se na definição de um modelo ou conjunto de modelos analíticos, através dos quais as viagens são estimadas sinteticamente a partir de informações relativas ao padrão de uso do solo e em função de medidas de impedância à realização de viagens entre diferentes pares O-D. O modelo gravitacional e o modelo de oportunidades intervenientes (descritos por Ortúzar, 1990) são exemplos de modelos sintéticos empregados para estimar a distribuição de

viagens entre pares O-D.

Ambos os métodos mencionados requerem, no entanto, uma quantidade considerável de tempo, recursos humanos e financeiros para a realização da coleta das informações necessárias para a determinação direta do número de viagens, no caso do primeiro método, ou para a calibração dos modelos sintéticos, no caso do segundo. Os custos associados nestes casos só são justificados se o levantamento dos dados de campo for a única alternativa para calibrar e validar os modelos em questão, o que normalmente ocorre durante o processo de planejamento do sistema viário e urbano ainda inexistente.

Entretanto, para situações de análise operacional de um sistema viário já existente, em que não existem recursos suficientes para a coleta dos dados necessários à aplicação dos métodos mencionados, existe um terceiro método, descrito por Cascetta (1984), em que o número de viagens entre pares O-D podem ser estimados a partir de contagens volumétricas obtidas em diversos locais da rede viária. A vantagem deste método é que os volumes de tráfego podem ser obtidos de maneira relativamente simples e com menor custo a partir de sensores permanentes, no caso de redes monitoradas por uma central de controle de tráfego, ou através de filmagem, sensores portáteis ou mesmo contagens manuais, no caso de redes não monitoradas. Embora na maioria dos casos este método gere várias soluções sem indicar, necessariamente, qual delas corresponde às viagens efetivamente existentes na prática, o método garante que os conjuntos obtidos como solução repliquem o mais fielmente possível os volumes de tráfego observados na rede viária (Paramahansan, 1999), o que é aceitável dentro do processo calibração de simuladores de tráfego ou na análise operacional do sistema viário.

Apesar de vários trabalhos que abordam métodos para a estimativa de matrizes O-D sintéticas a partir de contagens volumétricas serem encontrados na literatura desde a década de 1970 – como exemplos podem ser citados Robbilar (1975); Cascetta (1984); Van Zuylen e Willumsen (1980); Paramahansan (1999) e Van Aerde *et al.*, (2003) – tais métodos não são tão bem conhecidos e amplamente utilizados por parte dos pesquisadores e analistas de sistema de transporte, ao contrário do que ocorre com os modelos tradicionais de distribuição de viagens. Van Aerde *et al.* (2003) mencionam que os motivos que contribuem para isso são, além do próprio desconhecimento mais detalhado da base teórica do método, as dificuldades práticas encontradas no processo de estimativa das viagens entre pares O-D, abordadas neste artigo.

Tais dificuldades são também mencionadas por Paramahansan (1999), que apresenta uma síntese de diversos trabalhos existentes na literatura e compara diferentes formulações matemáticas, derivadas a partir da aplicação do conceito de maximização da entropia, que podem ser utilizadas para estimar o número de viagens a partir de contagens volumétricas. Apesar da grande contribuição teórica desta dissertação, o autor não detalha de forma muito clara questões práticas relativas à formulação do problema e sua efetiva resolução.

Dessa maneira, este trabalho tem como objetivo apresentar a fundamentação teórica referente à estimativa de matrizes O-D sintéticas a partir de contagens volumétricas obtidas nas vias de uma rede de tráfego, bem como propor um procedimento básico para implementar o método em planilhas eletrônicas ou rotinas computacionais. O método apresentado baseia-se uma das formulações propostas por Paramahansan (1999), modificada de forma incorporar a situação em que as viagens entre um determinado par O-D são realizadas por mais de uma rota.

Este artigo está dividido em 4 itens, incluindo esta introdução. No item 2 são apresentados os fundamentos básicos a respeito do método de estimativas de matrizes O-D sintéticas a partir de contagens volumétricas, bem como as principais dificuldades de ordem prática encontradas. No item 3 são descritos o processo de montagem do sistema de equações que relacionam volumes e número de viagens em formato matricial, a implementação das matrizes e vetores em uma planilha eletrônica e a solução do sistema de equações utilizando o suplemento Solver do Excel. Finalmente, no item 4, são apresentadas as considerações finais do trabalho.

2. ESTIMATIVA DE MATRIZES O-D A PARTIR DE CONTAGENS VOLUMÉTRICAS

Uma matriz O-D pode ser estimada em função das contagens volumétricas em diversos segmentos (arcos) da rede viária, bem como em função do conjunto de rotas utilizadas para realização das viagens. Para isso, é necessário descrever a topologia da rede viária em termos de nós, arcos e da identificação dos nós de início e de fim do arco que, por sua vez, também definem o sentido de tráfego nos arcos. Considerando então dois nós da rede como pontos de origem e destino de viagens, as seqüências de arcos que definem caminhos entre estes nós formam o conjunto de possíveis rotas utilizadas pelas viagens entre o par O-D em questão.

Existem diversas formulações matemáticas que podem ser utilizadas para obter matrizes O-D a partir de contagens volumétricas. A formulação na qual se baseia o método aqui exposto é descrita em detalhes por Paramahansan (1999) e foi implementada no aplicativo QUEENSOD, criado por Van Aerde (1998), para estimar matrizes O-D a partir de contagens volumétricas e percentuais dos movimentos de conversão em segmentos e interseções da rede viária.

Para facilitar a exposição do método, são mostradas duas redes na Figura 1. A rede 1 é formada por cinco arcos, dois nós de origem (1 e 2) e dois nós (3 e 4) para onde as viagens destinam-se. Nesta rede, só existe uma única rota para cada uma das viagens entre os quatro pares O-D. A rede 2 é semelhante à rede 1, exceto por possuir 6 arcos e pelo fato que as viagens podem ser realizadas por duas rotas diferentes (passando pelos arcos 3 ou 4). Na rede 2, considere-se que 60% das viagens são realizadas pelo arco 3 e as 40% restantes pelo arco 4.

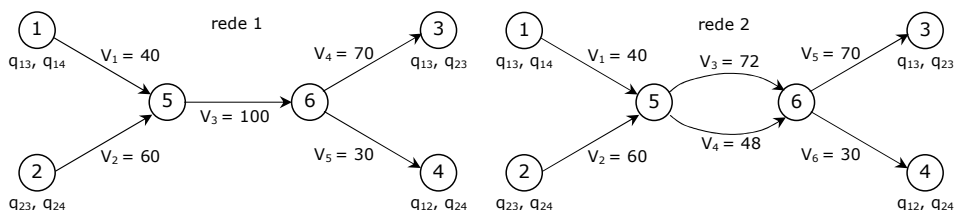


Figura 1: Redes utilizadas como exemplo

De acordo com Paramahansan (1999), os volumes de tráfego observados em um arco a da rede e as viagens realizadas por esse arco podem ser relacionadas através da expressão

$$V_o^a = \sum_{ij} p_{ij}^a q_{ij} \quad (1)$$

em que:

V_o^a : volume observado no arco a [veíc/h];

p_{ij}^a : porcentagem das viagens q_{ij} que utiliza o arco a ; e

q_{ij}^a : número de viagens entre o nó de origem i e o nó de destino j [veíc/h].

A equação (1) pode ser expressa também na forma matricial, o que é conveniente para a resolução do sistema utilizando planilhas eletrônicas ou programas computacionais:

$$\mathbf{P} \times \mathbf{Q} = \mathbf{V} \quad (2)$$

em que:

- P**: matriz de porcentagens de viagens p_{ij}^a ;
- Q**: vetor do número de viagens na rede q_{ij} ; e
- V**: vetor de volumes observados na rede.

Tomando como exemplo as redes mostradas na Figura 1, são obtidos os seguintes sistemas de equações, expressos de forma matricial, em que as quantidades de viagens q_{ij} são as incógnitas a serem determinadas (Figura 2). A matriz **P** tem dimensões $n_a \times n_q$, sendo n_a o número de arcos e n_q o número de pares O-D da rede.

$$\begin{aligned}
 \text{rede 1} \Rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} q_{13} \\ q_{14} \\ q_{23} \\ q_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \\ 100 \\ 70 \\ 30 \end{bmatrix} \\
 \text{rede 2} \Rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0,6 & 0,6 & 0,6 & 0,6 \\ 0,4 & 0,4 & 0,4 & 0,4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} q_{13} \\ q_{14} \\ q_{23} \\ q_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \\ 72 \\ 48 \\ 70 \\ 30 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Figura 2: Equacionamento das redes na forma matricial

Entretanto, a resolução do sistema de equações resultante da equação (2) requer a solução de dois outros problemas inerentes ao processo. Um deles é a falta de continuidade de volume em arcos contíguos e o segundo diz respeito à obtenção de sistemas de equações com múltiplas soluções. A causa de tais problemas, bem como as soluções empregadas para sua solução, são descritas nos itens 2.1 e 2.2, respectivamente. No item 2.3 é descrita a solução de ambos os problemas simultaneamente à estimativa das quantidades de viagens.

2.1. Falta de Continuidade em Arcos Contíguos

Uma das suposições básicas em redes de tráfego é a existência de continuidade volumétrica em arcos contíguos. Do ponto de vista teórico, a soma das quantidades de veículos que saem, em um determinado período, dos arcos que possuem um nó final em comum, deve ser igual à soma das quantidades de veículos que entram nos arcos que possuem o nó em questão como inicial. Por exemplo, as seguintes igualdades devem ser observadas nas redes 1 e 2:

$$\begin{aligned}
 \text{rede 1: } & \begin{cases} V_3 = V_1 + V_2 \\ V_3 = V_4 + V_5 \end{cases} & \text{rede 2: } & \begin{cases} V_1 + V_2 = V_3 + V_4 \\ V_3 + V_4 = V_5 + V_6 \end{cases}
 \end{aligned}$$

No entanto, somente na rede 1 as igualdades acima são verificadas. Em situações reais é muito mais comum não existir continuidade, tal como na rede 2, em função de dois motivos. Os volumes de tráfego de diferentes arcos podem ter sido coletados em dias ou horários distintos, em função da limitação de recursos físicos ou humanos para realizar a coleta simultaneamente em todos os arcos. Outro motivo é que a continuidade não seria verificada mesmo que fosse possível realizar contagens volumétricas simultâneas, pois os veículos que saem da rede logo após o início do período de coleta (por exemplo, no arco 5 de ambas as redes) não são conta-

bilizados nos arcos mais próximos às origens da rede (arcos 1 e 2) durante o período de coleta. Da mesma forma, é possível que os veículos que entram na rede um pouco antes do período de contagem terminar não sejam contabilizados nos arcos seguintes.

Além dos aspectos mencionados, possíveis erros na realização das contagens e aspectos relativos à agregação de dados em intervalos de tempo contribuem para a inexistência de continuidade em arcos contíguos. Para contornar este problema, Van Aerde (1998) propõe que as quantidades de viagens entre diferentes pares O-D sejam determinadas de tal forma que os volumes resultantes destas viagens sejam os mais próximos possíveis dos respectivos volumes observados, o que é obtido ao se minimizar a soma das diferenças quadráticas entre os volumes observados e respectivos volumes estimados:

$$E = \sum_a (V_o^a - p_{ij}^a q_{ij})^2 w^a, \quad \forall a \quad (3)$$

em que:

E : erro a ser minimizado;

w^a : fator de ponderação que varia conforme o tipo de critério de minimização de erro, descrito a seguir; e

p_{ij}^a , q_{ij} e V_o^a definidos anteriormente.

Para determinar as quantidades de viagens que minimizam E , a expressão (3) deve ser derivada em relação a q_{ij} , $\forall i, j$, e as expressões obtidas igualadas a zero, sendo obtido um sistema que contém n_q equações, uma para cada par O-D:

$$\sum_a p_{ij}^a \sum_{ij} p_{ij}^a w^a q_{ij} = \sum_a p_{ij}^a w^a V_o^a, \quad \forall i, j \quad (4)$$

O valor de w^a é um fator de ponderação para cálculo do erro E , que varia em função de 3 critérios propostos por Van Aerde (1998):

- *critério do erro mínimo quadrado*: por este critério, o erro a ser minimizado consiste na soma simples das diferenças quadráticas dos volumes observados e estimados, ou seja, $w^a = 1, \forall a$;
- *critério do erro mínimo Poissoniano*: utilizando este critério, as diferenças quadráticas dos volumes estimados e observados devem ser divididas pelas raízes quadradas dos respectivos volumes observados, ou seja, $w^a = \frac{1}{\sqrt{V_o^a}}, \forall a$.
- *critério do erro mínimo relativo*: neste caso, o erro a ser minimizado corresponde à soma das diferenças quadráticas entre os volumes observados e estimados, relativamente aos volumes observados. Por esse critério, $w^a = \frac{1}{V_o^a}, \forall a$;

Deve ser observado que a equação (4) só se aplica a situações em que $p_{ij}^a = 0$ ou $p_{ij}^a = 1$, ou seja, todas as viagens entre i e j são realizadas por uma única rota, tal como ocorre na rede 1. Uma forma de generalizar a expressão (4) para que ela possa ser aplicada tanto para o caso de rotas únicas (rede 1) ou múltiplas rotas em que os percentuais de uso de cada rota são conhecidos (rede 2) é proposta neste artigo:

$$\sum_a p_{ij}^a \sum_{ij} o_{ij}^a q_{ij} = \sum_a o_{ij}^a V_o^a, \quad \forall i, j \quad (5)$$

em que o_{ij}^a é determinado pela expressão

$$o_{ij}^a = \begin{cases} w^a, & p_{ij}^a \neq 0 \\ 0, & p_{ij}^a = 0 \end{cases} \quad (6)$$

2.2. Sistemas com Múltiplas Soluções

Outra questão observada nas duas redes da Figura 1 é que os sistemas de equações mostrados na Figura 2 admitem múltiplas soluções. Isso é verificado utilizando-se o método de Gauss-Jordan (Noble, 1969), que consiste em escalonar a matriz aumentada $[P \mid V]$, obtendo sua forma reduzida (na Figura 3 é mostrada a matriz escalonada para o sistema de equações da elaborado para a rede 1).

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 60 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 100 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 70 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 30 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 60 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 100 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 70 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 30 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]} \right\} \text{Posto da matriz} \\ \text{escalonada} = 3$$

Figura 3: Escalonamento da matriz aumentada para a rede 1

De acordo com Noble (1969), sempre que o número de linhas não nulas (ou *posto*) da matriz aumentada $[P \mid V]$ e da matriz P forem iguais e o posto da matriz aumentada, após seu escalonamento, for menor que o número de incógnitas do sistema ($3 < 4$, para a rede 1), o sistema possui infinitas soluções. No entanto, para o caso particular de uma rede que apresenta continuidade e se forem consideradas somente números de viagens inteiros e positivos, é possível definir um número finito de soluções. Dado, por exemplo, que os possíveis valores inteiros e positivos de q_{13} variam entre 10 e 40 veíc/h na rede 1, podem ser obtidas 31 combinações de quantidades de viagens para os pares O-D, sendo que os valores de q_{23} , q_{14} e q_{24} , são calculados a partir das relações apresentadas na Tabela 1.

Tabela 1: Possíveis quantidades de viagem para a rede 1 (Paramahansan, 1999)

O/D	3	4	Total
1	q_{13}	$q_{14} = 40 - q_{13}$	40
2	$q_{23} = 70 - q_{13}$	$q_{24} = q_{13} - 10$	60
Total	70	30	100

A questão passa a ser então determinar quais são os valores mais prováveis a ser adotados como solução do sistema de equações. Utilizando a técnica de maximização da entropia, Paramahansan (1999) mostra que a solução mais provável é obtida ao se maximizar uma função de verossimilhança $Z(q_{ij})$:

$$\text{maximize } Z(q_{ij}) = \frac{Q!}{\prod_{ij} (q_{ij}!)} \quad (7)$$

Na estimativa das quantidades de viagens mais prováveis, é possível também utilizar informações relativas a matrizes O-D já existentes. Este tipo de matriz, denominada *matriz semente*,

faz com que as viagens sejam estimadas de forma a manter, de certa forma, a proporcionalidade observada entre os valores de cada célula da matriz semente em relação ao total de viagens. Por exemplo, considerando que $s_{13} = 20$ veic/h na matriz semente, a partir das relações mostradas na Tabela 1 pode ser verificado que $s_{14} = 20$, $s_{23} = 50$ e $s_{24} = 10$ veic/h. Para estimar as viagens, deve-se maximizar a função de entropia $Z(q_{ij}, s_{ij})$, conforme demonstrado por Paramahansan (1999):

$$\text{maximize } Z(q_{ij}, s_{ij}) = \frac{Q!}{\prod_{ij} (q_{ij}!)} \prod_{ij} \left(\frac{s_{ij}}{S} \right)^{q_{ij}} \quad (8)$$

sendo Q o total de viagens estimadas q_{ij} :

$$Q = \sum_{ij} q_{ij} \quad (9)$$

e S o total de viagens s_{ij} da matriz semente:

$$S = \sum_{ij} s_{ij} \quad (10)$$

No caso particular da rede 1, os valores estimados de q_{ij} são idênticos aos respectivos valores de s_{ij} porque a rede possui continuidade. Caso a rede não apresente continuidade, a inclusão da matriz semente no processo faz com que as viagens estimadas tenham valores que se aproximam dos valores da matriz semente (veja os resultados obtidos nas Figuras 6 e 7).

Um detalhe a ser observado é que o uso de uma matriz semente uniforme (em que todos s_{ij} são iguais, $\forall i, j$) faz com que os resultados obtidos sejam idênticos aos obtidos com o uso de (7). Portanto, a equação (8) pode ser considerada como uma generalização da equação (7).

2.3. Estimativa da Matriz O-D Mais Provável em Redes sem Continuidade

A situação mais provável de ocorrer em um sistema real é a não existência de continuidade simultaneamente a um sistema de equações com múltiplas soluções. Para resolver este tipo de problema, Paramahansan (1999) sugere que o valor de $Z(q_{ij}, s_{ij})$ expresso em (8) seja maximizado, o que pode ser obtido derivando esta expressão em relação a cada q_{ij} e igualando os resultados a zero. Entretanto, considerando a complexidade de se trabalhar com derivadas de fatoriais e o fato que a equação (8) sempre resulta em valores positivos, é mais simples derivar o logaritmo natural desta expressão. Após a simplificação da expressão obtida, utilizando a aproximação de Stirling (os passos detalhados são fornecidos em maior detalhe em Paramahansan, 1999), é obtida a expressão:

$$\ln Z(q_{ij}, s_{ij}) = Q \ln Q - Q \ln S - \sum_{ij} (q_{ij} \ln q_{ij} - q_{ij} \ln s_{ij}) \quad (11)$$

A expressão (11) deve satisfazer às restrições de continuidade expressas em (5), o que é feito através do uso de multiplicadores de Lagrange. De acordo com Paramahansan (1999), as derivadas de (11) em relação a cada q_{ij} são iguais às derivadas de (5) em relação às respectivas q_{ij} , multiplicadas pelos respectivos multiplicadores de Lagrange λ_{ij} :

$$\sum_a p_{ij}^a \sum_{ij} o_{ij}^a \lambda_{ij} = \ln Q - \ln S - \ln q_{ij} + \ln s_{ij}, \quad \forall i, j \quad (12)$$

Dessa forma, as equações (12), (5) e as restrições (9) e (10) constituem o conjunto de expressões utilizado para se obter a solução geral do problema da estimativa de matrizes O-D sintéticas.

ticas para redes com continuidade de volumes ou não, sistema de equações com múltiplas soluções ou uma única solução, e existência ou não de matriz semente.

3. IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO EM FORMA MATRICIAL

Após a apresentação da formulação matemática, o próximo passo é a definição de um procedimento para automatizar a obtenção do sistema de equações necessário para a estimativa das quantidades de viagens, especialmente no caso de redes maiores em que a montagem do sistema torna-se tediosa e demasiadamente complexa para ser feita manualmente.

A solução do problema requer encontrar os valores de $2n_q$ incógnitas, sendo n_q quantidades de viagens entre cada par O-D e n_q multiplicadores de Lagrange, a partir do sistema composto por $2n_q$ equações, dentre as quais n_q são restrições lineares de continuidade (expressão 5) e as n_q restantes não são lineares (expressão 12), pois o total de viagens Q depende da determinação dos valores de q_{ij} e vice-versa.

A solução do sistema é baseada, inicialmente, na elaboração de vetores e matrizes, conforme descrito no item 3.1, que formam o sistema de equações cuja solução é obtida de acordo com o procedimento descrito no item 3.2. No item 3.3 é demonstrada uma forma manual intuitiva de se obter as matrizes e vetores necessários à solução do sistema de equações, que pode ser utilizada para redes de menor tamanho.

3.1. Montagem das Matrizes e Vetores

A primeira etapa para a estimativa da matriz O-D sintética é a definição da topologia da rede, ou seja, o vetor de nós **N** e a matriz de arcos **A**, na qual é informado, dentre os nós de **N**, qual é o nó inicial e o nó final de cada um dos arcos. Definida a sequência de arcos, deve ser construído um vetor **V** contendo os volumes observados em cada um dos arcos (Figura 4).

a) rede 1

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \quad
 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 5 \\ 5 & 6 \\ 6 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \quad
 \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \\ 100 \\ 70 \\ 30 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad
 \mathbf{O} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) rede 2

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \quad
 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 5 \\ 5 & 6 \\ 5 & 6 \\ 6 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \quad
 \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \\ 72 \\ 48 \\ 70 \\ 30 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0,6 & 0,6 & 0,6 & 0,6 \\ 0,4 & 0,4 & 0,4 & 0,4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad
 \mathbf{O} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Figura 4: Matrizes e vetores para as redes 1 e 2

A partir da matriz **A** são determinadas as rotas de viagem entre os diferentes pontos de origem e destino da rede, utilizando algoritmos para determinação de caminhos mínimos. No caso das redes consideradas neste artigo, as rotas foram definidas manualmente, mas para o caso de redes mais complexas, recomenda-se utilizar rotinas encontradas na literatura, tais como em Gondran e Minoux (1984) ou Boaventura Netto (1996).

Estabelecida a sequência de arcos utilizada como rota para cada par O-D, o próximo passo consiste em construir a matriz **P**, contendo os percentuais das quantidades de viagens q_{ij} que fazem uso de um dado arco ($0 \leq p_{ij}^a \leq 1$). Em seguida, monta-se a matriz **O** a partir da matriz **P** e dos valores de w^a , que variam de acordo com o critério de minimização do erro de continuidade, conforme discutido no item 2.1. Caso $w^a = 1, \forall a$, e só existir uma única rota entre cada par O-D, a matriz **O** é idêntica à matriz **P** (como pode ser visto na Figura 4a); caso contrário, **O** é diferente de **P** (Figura 4b).

3.2. Resolução do Sistema de Equações

O sistema de equações expresso por (12) e pelas restrições de continuidade (5) podem então ser definidos em função das matrizes **P**, **O** e do vetor **V**:

$$\mathbf{O}' \times \mathbf{P} \times \mathbf{\Lambda} = \mathbf{Y} \quad (13a)$$

$$\mathbf{O}' \times \mathbf{P} \times \mathbf{Q} = \mathbf{O}' \times \mathbf{V} \quad (13b)$$

sendo **$\mathbf{\Lambda}$** o vetor de multiplicadores de Lagrange λ_{ij} e **\mathbf{Y}** o vetor contendo os elementos que representam o lado direito da expressão (12). Para estimar as matrizes O-D para as redes 1 e 2, as equações (13a) e (13b) foram implementadas em uma planilha eletrônica do Microsoft Excel e a solução do sistema de equações foi obtida de forma iterativa através do suplemento Solver. A Figura 5 mostra a resolução do sistema de equações para a rede 1, considerando que a matriz semente é uniforme (Figura 5a) ou não (Figura 5b).

(a)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S} &= \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \lambda_{13} \\ \lambda_{14} \\ \lambda_{23} \\ \lambda_{24} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \ln(Q) - \ln(S) - \ln(q_{13}) + \ln(10) \\ \ln(Q) - \ln(S) - \ln(q_{14}) + \ln(10) \\ \ln(Q) - \ln(S) - \ln(q_{23}) + \ln(10) \\ \ln(Q) - \ln(S) - \ln(q_{24}) + \ln(10) \end{bmatrix} & \Rightarrow \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} -3,96 \\ 4,19 \\ 3,57 \\ -3,74 \end{bmatrix} \\
 S = \sum s_{ij} &= 40 & \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} q_{13} \\ q_{14} \\ q_{23} \\ q_{24} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 210 \\ 170 \\ 230 \\ 190 \end{bmatrix} & \Rightarrow \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 28 \\ 12 \\ 42 \\ 18 \end{bmatrix} \\
 Q = \sum q_{ij} &= ? & & & Q = 100
 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S} &= \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 50 \\ 10 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \lambda_{13} \\ \lambda_{14} \\ \lambda_{23} \\ \lambda_{24} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \ln(Q) - \ln(S) - \ln(q_{13}) + \ln(20) \\ \ln(Q) - \ln(S) - \ln(q_{14}) + \ln(20) \\ \ln(Q) - \ln(S) - \ln(q_{23}) + \ln(50) \\ \ln(Q) - \ln(S) - \ln(q_{24}) + \ln(10) \end{bmatrix} & \Rightarrow \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0,36 \\ -0,36 \\ -0,36 \\ 0,36 \end{bmatrix} \\
 S = \sum s_{ij} &= 100 & \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} q_{13} \\ q_{14} \\ q_{23} \\ q_{24} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 210 \\ 170 \\ 230 \\ 190 \end{bmatrix} & \Rightarrow \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 50 \\ 10 \end{bmatrix} \\
 Q = \sum q_{ij} &= ? & & & Q = 100
 \end{aligned}$$

Figura 5: Estimativa do número de viagens para a rede 1 considerando (a) matriz semente uniforme ou (b) matriz semente com valores diferenciados

A Figura 6 apresenta a solução do sistema e resultados obtidos para a rede 2, para os casos em que a matriz semente é uniforme (Figura 6a) ou possui quantidades de viagens diferenciados

3. Conte o número de vezes que cada uma das quantidades de viagens q_{13} , q_{14} , q_{23} e q_{24} aparece nos arcos da rota escolhida (3, 2, 2 e 1, respectivamente). O procedimento é similar no caso múltiplas rotas, considerando que a soma dos percentuais das viagens que utilizam rotas distintas (por ex., arcos 3 e 4 na rede 2) é igual a 1.
4. Os números obtidos na etapa 3 são os elementos de uma das linhas da matriz $\mathbf{O}' \times \mathbf{P}$.

O procedimento descrito acima deve ser repetido n_q vezes, de tal forma a obter uma linha para cada par O-D. Um procedimento semelhante é utilizado para obter o vetor $\mathbf{O}' \times \mathbf{V}$ no caso em que $w^a = 1, \forall a$. Neste caso, cada um dos elementos do vetor corresponde à soma dos volumes observados nos arcos utilizados como rota entre cada par O-D. Por exemplo, considerando que q_{13} na rede 2 utiliza os arcos 1, 3, 4 e 5, a soma dos volumes nesses arcos é $40 + 72 + 48 + 70 = 230$, correspondente ao valor da primeira linha do vetor $\mathbf{O}' \times \mathbf{V}$.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foram apresentados os fundamentos teóricos e aspectos práticos relativos ao processo para estimativa de matrizes O-D sintéticas a partir de contagens volumétricas nos segmentos de uma rede viária. O método apresentado neste trabalho generaliza a formulação originalmente apresentada por Paramahansan (1999), permitindo a determinação de matrizes para o caso em que existe mais de uma rota para um determinado par O-D, desde que os percentuais de utilização de cada rota sejam conhecidos.

O método apresentado é capaz de determinar matrizes O-D para redes sem continuidade volumétrica, identificando as quantidades de viagens mais prováveis, dentro do conjunto de soluções possíveis, a partir da maximização de uma função entrópica sujeita às restrições de continuidade da rede. Tais restrições, por sua vez, são obtidas ao se minimizar a soma das diferenças quadráticas entre volumes observados e estimados para todos os arcos da rede. A resolução do problema é feita de forma iterativa, já que o sistema de equações é composto por equações lineares e não lineares.

Para facilitar a montagem do sistema de equações do sistema, o que constitui a etapa mais trabalhosa de todo o processo, foi descrito um procedimento baseado em notação matricial. Dessa forma, as matrizes e vetores utilizados na solução do sistema podem ser manipulados de forma relativamente simples em aplicativos como o Excel ou Matlab.

Os sistemas de equações para as redes apresentadas como exemplo neste artigo foram montados no Excel e, para resolver os sistemas, foi utilizado o suplemento Solver. Os resultados obtidos são similares aos obtidos com o QUEENSOD, mostrando a validade do procedimento proposto. Apesar disso, deve ser lembrado que a utilização do Excel é limitada a redes de pequeno e médio porte pois, de acordo com Paramahansan (1999), o Solver tem capacidade de resolver sistemas com no máximo 200 variáveis, equivalente a 100 pares O-D, o que pode ser facilmente excedido no caso de redes reais.

Além do mais, o procedimento descrito não é totalmente automatizado, pois os caminhos mínimos utilizados para realização das viagens entre zonas foram determinados de forma manual. Para redes maiores, no entanto, essa etapa seria demasiadamente complexa. Apesar dessas limitações, o método para a montagem do sistema de equações no Excel e estimativa da matriz O-D através do Solver pode ser considerada como uma ferramenta de potencial aplicação didática.

Outra contribuição deste trabalho é o fato que a descrição do procedimento proposto, associada a exemplos hipotéticos, facilita a compreensão dos fundamentos teóricos relativos ao processo de determinação de matrizes O-D sintéticas a partir dos volumes de tráfego, o que permite que usuários do QUEENSOD ou de qualquer outro aplicativo similar possam analisar os resultados com mais segurança e entender de uma maneira mais clara como as matrizes O-D são estimadas.

No caso de redes maiores, recomenda-se a utilização do QUEENSOD (Van Aerde, 1998), que utiliza uma formulação baseada nos mesmos conceitos aqui apresentados para estimar as matrizes O-D e serve como ferramenta auxiliar no processo de calibração do simulador INTEGRATION (Rakha, 2002), pois ambos os programas compartilham o mesmo formato de arquivos de dados

Como continuidade a pesquisa aqui iniciada, recomenda-se investigar de possibilidade de implementação de uma rotina no Excel que determine os caminhos mínimos entre nós de origem e destino, visando automatizar completamente o procedimento proposto.

Agradecimentos: Os autores deste trabalho agradecem ao CNPq pela concessão de bolsas de produtividade e de iniciação científica, respectivamente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Boaventura Netto, P. O. (1996) *Grafos: Teoria, Modelos e Algoritmos*. 2ª ed., Edgard Blücher, São Paulo, 304 p.
- Cascetta, E. (1984) "Estimation of Trip Matrices from Traffic Counts and Survey Data: a Generalized Least Squares Estimator". *Transportation Research*, v. 16B, n. 4-5, p. 289-299.
- Gondran, M.; Minoux, M. (1984) *Graphs and algorithms*. Ed. Wiley, Chichester, New York, 650 p.
- Noble, B. (1969) *Applied Linear Algebra*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Ortúzar, J. D.; Willumsen, L. G. (1990). *Modeling Transport*. John Wiley & Sons, Chichester.
- Paramahamsan, H. (1999) *Fundamental Properties of Synthetic O-D Generation Formulations and Solutions*. Dissertação (Mestrado), Department of Civil and Environmental Engineering, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA. 133 p.
- Rakha, H. (2002) *INTEGRATION Release 2.30 for Windows: User's Guide-Volumes 1 e 2*, Michel Van Aerde & Associates, Ltd., Blacksburg, VA.
- Robillard, P. (1975) "Estimating the O-D Matrix from Observed Link Volumes" *Transportation Research*, v. 9, p. 123-128.
- Van Aerde, M. (1998) *QUEENSOD – Release 2.10 – User's Guide: Estimating Origin Destination Traffic Demands from Link Flow Counts*. M. Van Aerde and Associates, EUA.
- Van Aerde, M.; Rakha, H.; Paramahamsan, H. (2003) "Estimation of O-D Matrices: the Relationship between Practical and Theoretical Considerations". *Transportation Research Record 1831*, p. 122-130.
- Van Zuylen, H. J.; Willumsen, L. G. (1980) "The Most Likely Trip Matrix Estimated from Traffic Counts". *Transportation Research*, v. 14B, p. 281-293.

Endereço dos autores:

Sergio Henrique Demarchi (shdm@terra.com.br)
Professor Adjunto, Depto. de Engenharia Civil,
Grupo de Engenharia de Transportes
Bruno Vieira Bertoncini (bruviber@irapida.com.br)
Aluno de iniciação científica, curso de Engenharia Civil

Universidade Estadual de Maringá – UEM
Av. Colombo, 5790 - Bloco C67
87020 - 900 – Maringá, PR, Brasil
fone: (044) 261-4322
fax: (044) 261-4322