CURVAS EM FORMA DE "S" PARA PREVISÃO DO DESEMPENHO DE PAVIMENTOS

Glauco Pontes Filho
Departamento de Engenharia de Transportes e Geotecnia
Universidade Federal de Minas Gerais
John Kennedy Guedes Rodrigues
Departamento de Engenharia Civil
Universidade Federal de Campina Grande

RESUMO
A curva de desempenho de pavimentos de concreto asfáltico tem uma forma característica em "S". Curvas em forma de "S" podem ser úteis para prever o desempenho de pavimentos pois a sua forma se assemelha à forma real da curva de deterioração de pavimentos de concreto asfáltico. O presente trabalho apresenta o desenvolvimento de uma curva em forma de "S", chamada curva sigmoidal, e faz uma breve descrição de três técnicas de modelagem do desempenho de pavimentos utilizando a extrapolação linear, a regressão linear e a regressão polinomial..

ABSTRACT
The performance curves of asphalt concrete pavements have a characteristic "S" shape. "S" shaped curves may be useful to predict the pavement performance because his shape is similar to real shape of asphalt concrete pavement performance curves. In this work, a development of a "S" shaped curve called sigmoidal curve is made and more three techniques to predict pavement performance are presented, using linear extrapolation, linear regression and polynomial regression.

1. INTRODUÇÃO

Modelos de previsão de desempenho de pavimentos são um instrumento tecnológico essencial para a análise econômica de investimentos em rodovias. Sistemas para previsão de desempenho de pavimentos devem ser específicos para cada ambiente e tipo de estrutura de pavimentos, porque só desta maneira poderão fornecer informações adequadas para a tomada de decisões durante a gerência de vias. Vários Departamentos de Estradas de Rodagem e Concessionárias no Brasil e principalmente em outros países, utilizam dados de condição dos pavimentos com os seguintes objetivos:

- Estabelecer prioridades.
- Determinar estratégias de manutenção e reabilitação.
- Prever o desempenho.

Engenheiros e administradores de rodovias têm se utilizado de modelos de previsão de desempenho de pavimentos desenvolvidos em países do primeiro mundo para orientação de decisões ao planejar, projetar, construir e restaurar pavimentos.

2. MODELOS DE PREVISÃO DA CONDIÇÃO DOS PAVIMENTOS

Segundo a FHWA (1994), a maioria dos modelos de deterioração fazem uma estimativa futura dos seguintes parâmetros de desempenho:

- Irregularidade, que pode ser expressa em termos de *Riding Comfort Index* (RCI), Índice Internacional de Irregularidade (IRI), ou Quociente de Irregularidade (QI);
- Estrutural, expressa em termos de deflexão ou *Strutural Adequacy Index* (SAI);
- Defeitos de superfície, como trincas, desgaste ou deformações permanentes;
- Índices compostos, tais como *Present Serviceability Index* (PSI), *Pavement Condition Index* (PCI), *Pavement Condition Rating* (PCR), *Pavement Quality Index* (PQI).

Existem várias técnicas para desenvolvimento de modelos de deterioração de pavimentos. Entre as principais, pode-se citar:

- Extrapolação Linear
- Regressão Linear
- Regressão polinomial

2.1. Extrapolação Linear
O mais simples modelo de previsão da condição é baseado na extrapolação linear dos dois últimos pontos de dados. Este método é aplicável somente para seções individuais de pavimentos.

Este método requer que no mínimo uma medida de condição seja executada desde a construção, portanto obtendo dois pontos: uma condição inicial do pavimento que pode ser assumida durante a última construção, e uma segunda condição do pavimento determinada em um levantamento de dados a posteriori.

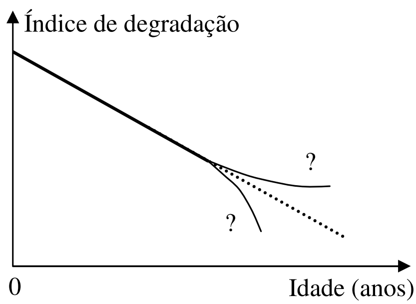

Figura 1: Extrapolação Linear.

Embora este método de previsão da deterioração seja suficientemente preciso para um pequeno período de tempo (alguns anos), ele não é preciso para longos períodos de tempo.

2.2. Regressão Linear
A análise de regressão é usada para estabelecer uma relação empírica entre duas ou mais variáveis. Várias formas de análise de regressão são usadas e a mais simples é a regressão linear entre duas variáveis. O modelo é descrito como:

$$y_i = a + b \cdot x_i + \varepsilon_i \tag{1}$$

onde: y = variável dependente, isto é, índices de condição do pavimento;
x = variável independente ou explicadora, isto é, tempo;
ε = erro;
a, b = parâmetros de regressão.

Usando o método dos mínimos quadrados, os valores de a e b são dados pelo sistema de equações a seguir:

$$\begin{aligned} n.a + b.\sum x_i &= \sum y_i \\ a.\sum x_i + b.\sum x_i^2 &= \sum x_i y_i \end{aligned} \tag{2}$$

A análise de regressão linear pode ser feita com mais de duas variáveis. Neste caso, é conhecida como regressão linear múltipla. É assumido que a variável dependente, *y*, é função linear das variáveis independentes, isto é:

$$y(x) = a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + ... \tag{3}$$

Os parâmetros de regressão são calculados de modo semelhante à análise de regressão simples. Como exemplo de regressão múltipla, GOPINATH *et al.* (1994), utilizando dados cedidos pelo Banco Mundial, oriundos da *Pesquisa do Interrelacionamento entre Custos de Construção, Conservação e Utilização de Rodovias* (GEIPOT, 1982), realizada no Brasil, desenvolveram várias equações de desempenho. Dentre elas, a equação de previsão do PSI é a seguinte:

$$PSI = \alpha_0 + \alpha_1 . \frac{AGER}{SNC} + \alpha_2 . \frac{ESAXL}{SNC} + \alpha_3 . \frac{CP}{SNC} + \varepsilon \tag{4}$$

onde: PSI = índice de serventia;
$AGER$ = idade do pavimento desde a reabilitação;
$ESAXL$= número equivalente de operações do eixo padrão;
CP = precipitação cumulativa;
SNC = número estrutural corrigido;
α_i = coeficientes de regressão;
ε = erro.

Regressões não lineares podem ser necessárias quando a relação entre *y* e *x* não é linear. A figura 2 mostra um exemplo de uma relação não linear entre a condição do pavimento e o tempo.

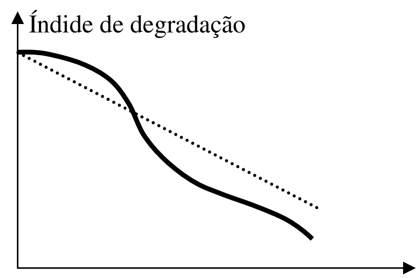

Figura 2: Relação não-linear entre o índice de degradação e a idade do pavimento.

No caso da figura 2, a relação linear pode ser usada, mas o modelo pode subestimar a condição nos primeiros anos da vida do pavimento e superestimar a condição nos anos posteriores. Mas uma relação não linear pode ser analisada como um modelo linear por transformações simples. Por exemplo, a relação a seguir, que não é linear, pode ser analisada como um modelo linear da seguinte maneira:

$$y = \frac{1}{a + bx} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{y} = a + bx \quad \rightarrow \quad y' = a + bx \tag{5}$$

COLLURA *et al.* (1993), propuseram funções simples ao invés de formas matemáticas complicadas na construção das equações de desempenho. Para tal, utilizaram uma função exponencial na seguinte forma:

$$PCI = a.e^{b.t} + k \tag{6}$$

onde: *PCI* = *pavement condition index.*
a, b, k = constantes de regressão.
t = idade do pavimento.

Através de uma transformação usando logaritmos, a equação proposta por COLLURA *et al.* (1993) pode ser analisada como um modelo linear.

2.3. Regressão Polinomial
Na previsão do desempenho de pavimentos, uma das mais poderosas técnicas de previsão da mudança de uma variável y (índice de condição do pavimento) em função de uma variável x (idade, tráfego, etc.) é a regressão polinomial. Dadas as observações (x_i, y_i) com i=1,2,...,n , pode-se construir um polinômio de grau n, $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ que melhor se adapte aos dados.

Nestas técnica quando se correlaciona y versus x, é desejável certificar-se que a derivada $P'(x)$ seja não positiva para qualquer idade $x = 0,1,2,...,z$. Logo, os coeficientes a_1, a_2, ... ,a_n são determinados da seguinte maneira: $\Sigma[y_i - P(x_i)]^2$ é minimizado (método dos mínimos quadrados), com as seguintes condições de contorno:

- $P(0) = a_0$;
- $a_1+2\cdot a_2\cdot x+3\cdot a_3\cdot x^2+\ldots+n\cdot a_n\cdot x^{n-1} \leq 0$, que garante para $x\geq 0$ uma declividade não positiva, o que significa que a condição do pavimento será decrescente em função do tempo.

3. MODELO SIGMOIDAL (CURVA EM FORMA DE "S")
Todos os modelos matemáticos descritos anteriormente podem ser utilizados na modelagem do desempenho de pavimentos. Porém, já foi observado na prática que as curvas de desempenho de pavimentos de concreto asfáltico têm uma forma característica em "S", como mostra a figura 3. Seria interessante, pois, desenvolver um modelo matemático cuja curva acompanhasse a forma da curva de deterioração dos pavimentos de concreto asfáltico.

Existem vários tipos de equações que geram curvas em forma de "S". A curva em forma de "S" que será estudada neste trabalho tem a seguinte equação, que foi sugerida por GARCIA-DIAZ & RIGGINS (1984) e SMITH *et al.* (1993):

$$g = \frac{P_0 - P}{P_0 - P_f} = e^{-\left(\frac{\rho}{W}\right)^{\beta}} \tag{7}$$

onde: g = índice de degradação (PSI, PCI, IGG, etc.)
W = tráfego ou idade do pavimento.
β = parâmetro de "forma".
ρ = parâmetro de "escala".
P_0 = índice de condição inicial do pavimento.
P_f = índice de condição final do pavimento.

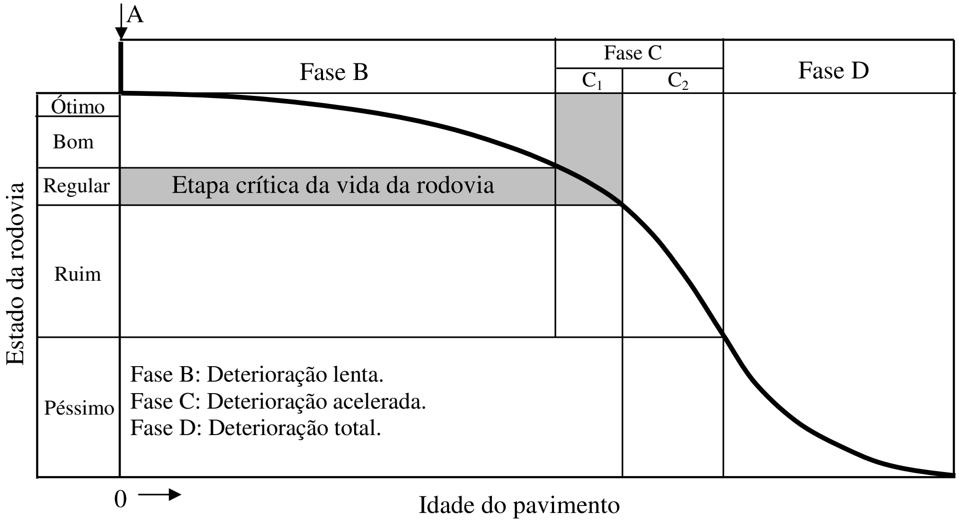

Figura 3: Curva característica da deterioração dos pavimentos de concreto asfáltico ao longo do tempo (Fonte: CEPAL, 1994).

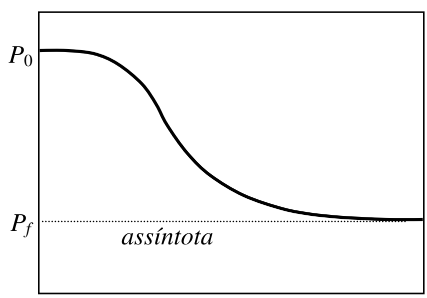

Figura 4: Representação dos valores P_0 e P_f no modelo sigmoidal.

Segundo GARCIA-DIAZ & RIGGINS (1984), a curva de desempenho em forma de "S" mostrada na figura 4 requer uma equação da forma:

$$\frac{P_0 - P}{P_0 - P_f} = \exp\left[-\left(\frac{\rho}{W}\right)^{\beta}\right] \quad (8)$$

Isolando $P_0 - P$ na equação (8), obtém-se:

$$P_0 - P = \left(P_0 - P_f\right)\cdot \exp\left[-\left(\frac{\rho}{W}\right)^{\beta}\right] \quad (9)$$

Aplicando logaritmo em ambos os membros da equação (9) e fazendo P_0-$P_f = \alpha$, tem-se:

$$\ln\left(P_0 - P\right) = \ln\alpha - \rho^{\beta}\cdot\left(\frac{1}{W}\right)^{\beta} \quad (10)$$

Usando a transformação $e^{\theta} = \frac{1}{W}$, tem-se: $\ln\left(P_0 - P\right) = \ln\alpha - \rho^{\beta}\cdot\left(e^{\beta}\right)^{\theta}$.

Fazendo: $y = \ln(P_0 - P)$, $a = \ln\alpha$, $b = \rho^{\beta}$, $c = e^{\beta}$ teremos: $y = a - b \cdot c^{\theta}$.

Dados um conjunto de n pontos (P_i , $IDADE_i$), onde P_i é o índice de condição do pavimento correspondente à idade $IDADE_i$ (i = 1, 2, 3,..., n), pode-se encontrar os valores de a, b e c da seguinte maneira:

- Calcula-se $y_i = \ln(P_0 - P_i)$
- Calcula-se $\theta_i = \ln\left(\dfrac{1}{IDADE_i}\right)$

Logo, os valores observados de P_i e $IDADE_i$ são transformados em valores de y_i e θ_i, respectivamente. O modelo estatístico usado é $y_i = a - b \cdot c^{\theta_i} + \in_i$, onde $\in_i$ é o erro aleatório cometido na estimativa que pode ser escrita como $\in_i = y_i - a + b \cdot c^{\theta_i}$. Aplicando o método dos mínimos quadrados, tem-se (onde se lê $\sum$, leia-se $\sum\limits_{i=1}^{n}$):

$$\sum \in_i^2 = \sum \left(y_i - a + b \cdot c^{\theta_i}\right)^2 \tag{11}$$

As derivadas parciais devem ser iguais a zero, logo:

$$\frac{\partial}{\partial a}\sum \in_i^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \sum\left(y_i - a + b \cdot c^{\theta_i}\right) = 0 \tag{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial b}\sum \in_i^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \sum\left(y_i - a + b \cdot c^{\theta_i}\right) \cdot c^{\theta_i} = 0 \tag{13}$$

$$\frac{\partial}{\partial c}\sum \in_i^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \sum\left(y_i - a + b \cdot c^{\theta_i}\right) \cdot b \cdot \theta_i \cdot c^{\theta_i - 1} = 0 \tag{14}$$

Das equações (12) e (13) resulta o sistema de equações:

$$n \cdot a - b \cdot \sum c^{\theta_i} = \sum y_i \tag{15}$$

$$a \cdot \sum c^{\theta_i} - b \cdot \sum c^{2\theta_i} = \sum\left(y_i \cdot c^{\theta_i}\right) \tag{16}$$

Os valores de a e b no sistema formado pelas equações (15) e (16) são:

$$a = \frac{\sum y_i \cdot \sum c^{2\theta_i} - \sum c^{\theta_i} \cdot \sum\left(y_i \cdot c^{\theta_i}\right)}{n \cdot \sum c^{2\theta_i} - \left(\sum c^{\theta_i}\right)^2} \tag{17}$$

$$b = \frac{\sum y_i \cdot \sum c^{\theta_i} - n \cdot \sum\left(y_i \cdot c^{\theta_i}\right)}{n \cdot \sum c^{2\theta_i} - \left(\sum c^{\theta_i}\right)^2} \tag{18}$$

Os valores de a e b dados pelas equações (17) e (18) podem ser substituídos na equação (14):

$$\sum\left(y_i \cdot \theta_i \cdot c^{\theta_i}\right) - \frac{\sum c^{2\theta_i} \cdot \sum y_i - \sum c^{\theta_i} \cdot \sum\left(y_i \cdot c^{\theta_i}\right)}{n \cdot \sum c^{2\theta_i} - \left(\sum c^{\theta_i}\right)^2} \cdot \sum\left(\theta_i \cdot c^{\theta_i}\right) +$$

$$+ \frac{\sum c^{\theta_i} \cdot \sum y_i - n \cdot \sum\left(y_i \cdot c^{\theta_i}\right)}{n \cdot \sum c^{2\theta_i} - \left(\sum c^{\theta_i}\right)^2} \cdot \sum\left(\theta_i \cdot c^{2\theta_i}\right) = 0 \tag{19}$$

A equação (19) pode ser resolvida para *c* por métodos numéricos. Uma vez *c* calculado, *a* e *b* podem ser determinados pelas equações (17) e (18), respectivamente, e seus valores podem ser usados para estimar α, ρ, β e P_f a partir das equações $\alpha = e^a$; $\beta = \ln(c)$, $\rho = b^{1/\beta}$ e $P_f = P_0 - \alpha$, obtendo desta maneira a equação de desempenho do pavimento.

4. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Os requisitos básicos para um modelo de previsão de desempenho eficiente são:

- Uma base de dados adequada e confiável;
- Inclusão das variáveis que mais afetam a deterioração do pavimento;
- Cuidadosa seleção da forma funcional do modelo;
- Critérios para avaliar a precisão do modelo.

Infelizmente, no Brasil, é praticamente inexistente um banco de dados de deterioração das rodovias, o que torna bastante difícil um estudo mais aprofundado das curvas de desempenho de pavimentos. Mas, como já foi observado na prática, em geral as curvas de desempenho de pavimentos de concreto asfáltico têm a forma de "S", e portanto as curvas sigmoidais podem ser úteis para prever o desempenho de pavimentos pois a sua forma se assemelha à forma real da curva de deterioração destes pavimentos.

Recomenda-se aos técnicos que labutam na área de gerência de pavimentos a obtenção de bancos de dados confiáveis de deterioração de pavimentos para uma melhor avaliação da precisão do modelo apresentado neste trabalho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CEPAL (1994) *CAMINHOS – Um Novo Caminho para a Gestão e Conservação das Redes Viárias*. Comissão Econômica para América Latina e Caribe. Tradução IPC/BR, Setembro, 1994.

COLLURA, J.; SPRING, G. & BLACK, K.B. (1993) *Service Lives and Costs of Local Highway Maintenance and Rehabilitation Treatments*. Transportation Research Record - TRB, nº 1397.

FHWA (1994) *Using Pavement Performance Data to Develop Mechanistic-Empirical Concepts for Deteriorated and Rehabilitated Pavements*. Federal Highway Administration. McLean, Virginia, Research and Development Turner-Fairbank Highway Research Center of FHWA. (Publication, FHWA-RD-93-162).

GARCIA-DIAZ, A. & RIGGINS, M. (1984) *Serviceability and Distress Methodology for Predicting Pavement Performance*. Transportation Research Record 997. National Research Council, Washington, DC.

GEIPOT (1982) *Pesquisa do Interrelacionamento entre Custos de Construção, Conservação e Utilização de Rodovias.* Empresa Brasileira de Planejamento de Transportes, Ministério dos Transportes, Brasília-DF.

GOPINATH, D.; BEN-AKIVA, M. & RAMASWAMY, R. (1994) *Modeling Performance of Highway Pavements*. Transportation Research Record nº 1449.

SMITH, H.A.; STEPHANOS, P.J.; RADA, G.R.; SCHWARTZ, C.W. & CASANOVA, L. (1993) *Development of Delaware Department of Transportation Pavement Management System*. Transportation Research Record - TRB, nº 1397, 1993.

Endereço dos autores:
Universidade Federal de Minas Gerais
Escola de Engenharia da UFMG
Av. do Contorno 842, sala 608, Centro.
CEP 30.110.060 – Belo Horizonte/MG – Fone: (031) 3238-1831
E-mail: gpontes@usa.net e jkennedy@geotecnia.ufcg.edu.br