

MÉTODO DA COLOCAÇÃO PARA OBTENÇÃO DE SÉRIES DE PRONY USADAS NA CARACTERIZAÇÃO VISCOELÁSTICA DE MATERIAIS ASFÁLTICOS

Pedro Cavalcanti de Sousa

Jorge Barbosa Soares

Laboratório de Mecânica dos Pavimentos – LMP

Universidade Federal do Ceará

RESUMO

Este artigo contém instruções detalhadas para a execução do método numérico da colocação aplicado aos ensaios de fluência (*creep*) e relaxação em corpos de prova de misturas asfálticas. As diversas etapas de cálculo são apresentadas em um fluxograma seguido de explicações que procuram sistematizar a abordagem para a execução dos cálculos, facilitando a implementação computacional. Descrevem-se os processos de obtenção de curvas mestras e de ajuste da série de Prony a uma dada curva mestra. Explicam-se também os critérios de escolha dos valores dos coeficientes da referida série, de modo a evitar equívocos comuns que podem levar a resultados indesejáveis.

ABSTRACT

This paper provides detailed information about the collocation method as it applies to HMA specimens subjected to creep and relaxation tests. A flowchart is presented, followed by explanations intending to provide a systemic approach for the required calculations, making it easier to be implemented computationally. The process to obtain the master curves is described along with the process to curve fitting a Prony series to a specific master curve. The selection criteria for all Prony coefficients are also explained so as to avoid common mistakes that can result in undesirable results.

1. INTRODUÇÃO

O comportamento viscoelástico do revestimento asfáltico é determinado pela presença do ligante asfáltico na mistura. Devido a essa característica, as misturas asfálticas apresentam diferentes respostas para um mesmo carregamento feito em diferentes momentos de sua vida útil (SOARES e SOUZA, 2002; OLARD, 2003). Tal fato também se mostra verdade ao se analisar o que ocorre quando a mistura sofre solicitações idênticas a temperaturas diferentes. Visando uma correta caracterização mecânica do referido material torna-se então imprescindível que se obtenham parâmetros capazes de levar em consideração os efeitos viscoelásticos para o estudo e análise de tensões (σ) e deformações (ϵ), necessárias ao dimensionamento moderno de estruturas de pavimentos (ROBERTS *et al.*, 1996; HUANG, 2004; EVANGELISTA JR. *et al.*, 2006; MEDEIROS e SOARES, 2006).

Nesse sentido, encontram-se na literatura grandezas que descrevem as relações entre σ e ϵ . Uma delas é o módulo de rigidez, que permite a obtenção dos valores de tensão para deformações impostas. A rigidez é chamada de módulo de relaxação quando as deformações são constantes em relação ao tempo ($\epsilon(t) = \epsilon_0$) e é representada por $E(t)$. Para deformações que sofrem variações periódicas no tempo, passa-se a trabalhar com o módulo complexo ou módulo dinâmico, comumente referido por $E^*(j\omega)$, onde j é o número imaginário e ω a pulsação ($\omega=2\pi f$, sendo f a frequência do ensaio). Inversamente, quando se deseja obter a deformação a partir dos valores de tensão aplicada, usa-se a noção de flexibilidade. Se obtida a partir de tensões constantes no tempo ($\sigma(t) = \sigma_0$), esta grandeza é chamada de função fluência ou compliância e referida por $D(t)$. Para o caso de variações periódicas de tensões, tem-se a compliância complexa, $D^*(j\omega)$ (SCHAPERLY, 1982; MOMM, 2001; OLARD, 2003).

De acordo com a teoria da viscoelasticidade linear, qualquer uma dessas grandezas pode ser obtida a partir do conhecimento da expressão de apenas uma delas. As transformações

necessárias para se passar de uma propriedade a outra são conhecidas e podem ser resumidas nas seguintes equações (FINDLEY *et al.*, 1982):

$$E^*(j\omega) = \mathcal{L}[E(t)] \text{ e } E(t) = \mathcal{L}^{-1}[E^*(j\omega)] \quad (1.1a) \text{ e } (1.1b)$$

$$D^*(j\omega) = \mathcal{L}[D(t)] \text{ e } D(t) = \mathcal{L}^{-1}[D^*(j\omega)] \quad (1.2a) \text{ e } (1.2b)$$

$$\int_0^t D(t-\tau)E(\tau)d\tau = \int_0^t E(t-\tau)D(\tau)d\tau = t \text{ e } E^*(j\omega).D^*(j\omega) = -\frac{1}{\omega^2} \quad (1.3a) \text{ e } (1.3b)$$

onde: $\mathcal{L}[\]$: Transformada de Laplace;

$\mathcal{L}^{-1}[\]$: Transformada inversa de Laplace;

τ : Tempo que inicia a partir do começo da solicitação imposta ao material.

A importância das expressões analíticas de E , E^* , D e D^* torna-se evidente. Seu processo de obtenção pode, no entanto, ser difícil e bastante trabalhoso. O corrente trabalho busca contribuir, portanto, para o estudo do comportamento viscoelástico das misturas asfálticas e/ou ligantes asfálticos, sistematizando a obtenção das equações analíticas que se ajustam aos resultados dos ensaios de caracterização. Aqui será explorado o chamado método da colocação, conhecido por sua eficiência e simplicidade (SCHAPERLY, 1982; PARK e KIM, 2001; HUANG, 2004; SOUZA, 2005; MEDEIROS, 2006).

Devido à facilidade de execução de ensaios de fluência (*creep*), isto é, da obtenção da compliância (*creep compliance*) $D(t)$, esta propriedade foi tomada como exemplo ao longo do texto. No entanto, todos os desenvolvimentos são válidos para as outras propriedades: módulo de relaxação, módulo dinâmico e compliância complexa.

2. ETAPAS DE EXECUÇÃO DO MÉTODO DA COLOCAÇÃO

Primeiramente é apresentado na Figura 1 o fluxograma usado como base para as explicações de cada uma das fases numeradas na sequência apresentada no trabalho. Todos os termos e formulações são devidamente explicados ao longo do texto. Deve-se observar de partida que o termo 'década', recorrente na literatura internacional (*decade*) e ao longo do artigo, não se refere a um período de 10 anos. Esta terminologia é utilizada para designar a diferença entre dois valores quaisquer em termos do número de ordens de grandeza, isto é, a distância entre eles numa escala logarítmica de base 10.

2.1. Etapa 1

O primeiro passo consiste na entrada dos resultados experimentais numa planilha, observando a compatibilidade de unidades. Em seguida, as curvas da compliância (ou do módulo de relaxação, conforme o ensaio realizado seja de fluência ou de relaxação, respectivamente) são traçadas em função do tempo para as diferentes temperaturas de ensaio. O tempo é expresso em escala logarítmica. Dessa forma, chega-se às curvas mostradas na Figura 2.

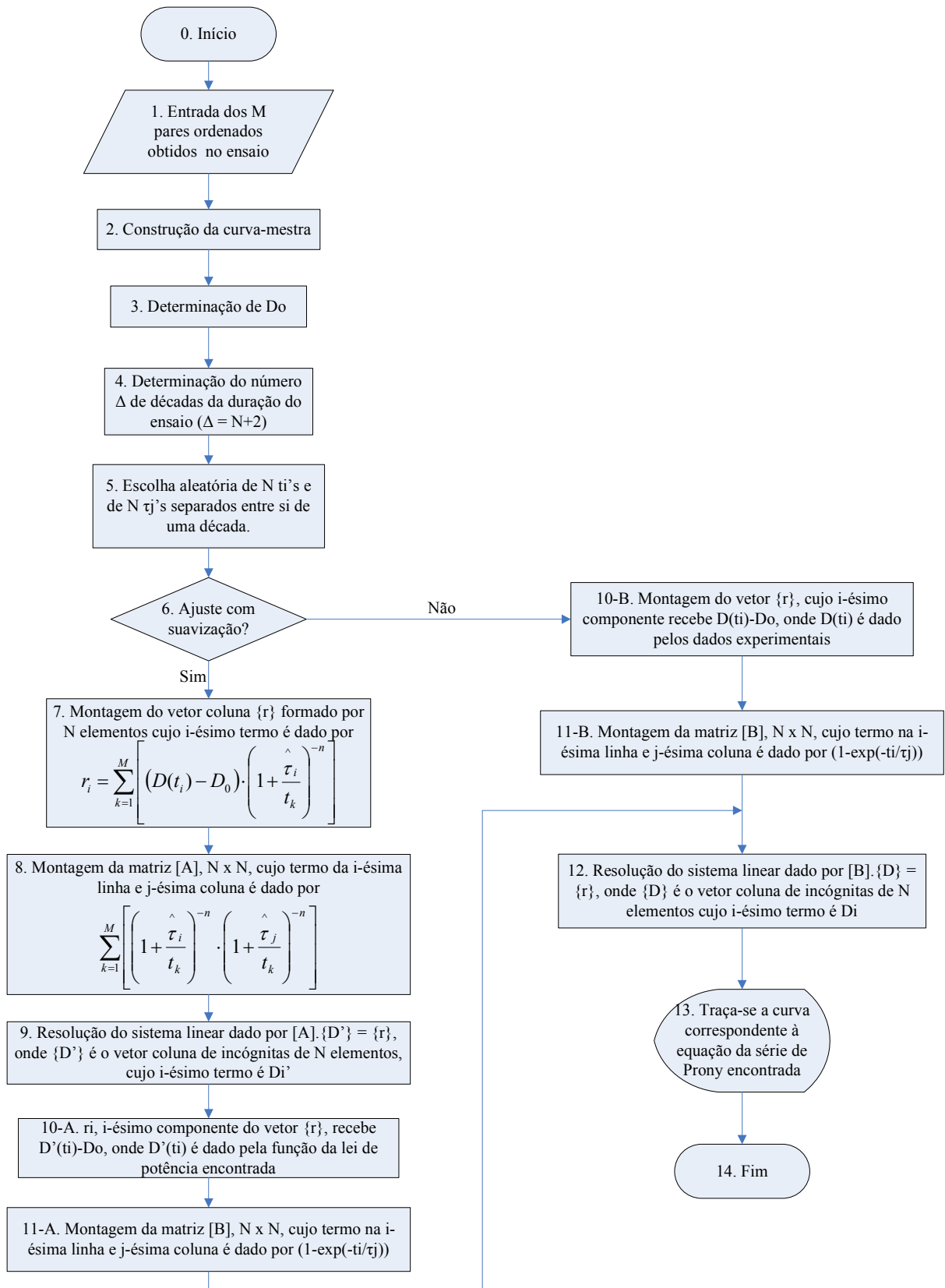


Figura 1: Fluxograma esquemático mostrando todas as etapas de execução do método da colocação.

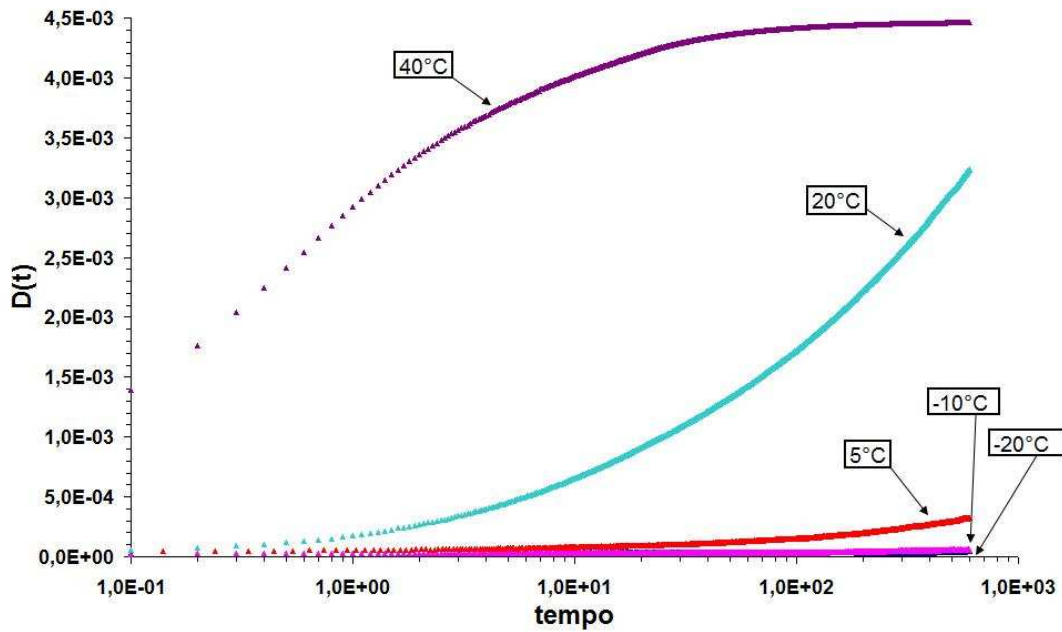


Figura 2: Compliância em função do tempo para diferentes temperaturas de ensaio (curvas de -20°C e -10°C se sobrepõem).

2.2. Etapa 2

Uma vez traçadas as curvas $D(t) \times t$, inicia-se o processo de construção da curva mestra. Tal procedimento consiste na escolha de uma das curvas obtidas na fase anterior como referência e no conseqüente deslocamento das demais à esquerda ou à direita daquela. A seleção de uma determinada curva trata-se, na verdade, da escolha de uma temperatura de referência para a qual se deseja conhecer o comportamento do material em estudo (FINDLEY *et al.*, 1982; CHRISTENSEN, 1982; BUTTLAR *et al.*, 1998; LAKES, 1998; OLARD, 2003).

A equivalência de comportamentos entre os parâmetros de tempo (ξ) e temperatura (T) é dada pelo princípio da superposição tempo-temperatura, segundo o qual o efeito de “ T ” no comportamento mecânico dependente de “ ξ ” é equivalente ao encurtamento ou ampliação do tempo real (t) para temperaturas respectivamente abaixo ou acima da temperatura de referência (FINDLEY *et al.*, 1982).

Para tornar clara a obtenção das curvas mestras, apresenta-se, a seguir, uma demonstração simplificada do princípio matemático que justifica a possibilidade de se realizarem as translações horizontais. Parte-se da seguinte equação que caracteriza o fenômeno de fluência no estudo de materiais viscoelásticos:

$$\varepsilon(t) = \int_0^{\xi} D(\xi - \xi') \frac{\partial \sigma(\xi')}{\partial \xi'} d\xi' \quad (2.1a)$$

onde ξ é chamado de tempo reduzido (CHRISTENSEN, 1982) e difere do tempo convencional t por incluir os efeitos das mudanças de temperatura no material. Com efeito, sabe-se que o envelhecimento de misturas asfálticas se dá com maior ou menor velocidade, conforme seja a temperatura do meio. Assim, para uma dada temperatura de referência (T_R), ξ é a variável responsável pela adaptação à T_R dos efeitos temporais ocorridos em uma mistura quando esta esteve exposta a T . Para o ensaio de relaxação, tem-se:

$$\sigma(t) = \int_0^{\xi} E(\xi - \xi') \frac{\partial \varepsilon(\xi')}{\partial \xi'} d\xi' \quad (2.1b)$$

Ademais, define-se ξ como:

$$\xi = \xi(t) = \int_0^t \frac{1}{a_T} d\tau \Big|_{a_T = a_T[T(\tau)]} \quad (2.2)$$

sendo a mesma relação válida para ξ' .

A função a_T é conhecida como fator de translação horizontal (*shift factor*), sendo a única propriedade do material que depende da temperatura, e, uma vez que a temperatura é variável ao longo da escala de tempo, a_T também o é. Segundo MEDANI e HUURMAN (2003) este fator pode ser obtido transladando-se visualmente os dados experimentais, através da equação de Arrhenius ou pela equação de Williams-Landel-Ferry.

Visto o objetivo tutorial desse trabalho, indica-se a equação de Arrhenius, por se tratar de uma solução de fácil aplicação e implementação. Sua formulação geral é:

$$\log(a_T) = \frac{E_a}{2,303R} \left(\frac{1}{T(\tau)} - \frac{1}{T_R} \right) \quad (2.3)$$

onde E_a é a energia de ativação por mol; R , a constante universal dos gases e τ , o tempo.

Quimicamente, a expressão relaciona, em função de uma temperatura de referência, a velocidade de uma reação e a temperatura do meio em que ela ocorre. Assim, a equação (2.3) expressa a reação de envelhecimento da mistura asfáltica a uma dada temperatura T_R , a partir das velocidades em que essa mesma reação se dá quando em temperaturas diferentes.

Na prática, os ensaios são realizados a temperaturas constantes ($T(\tau) = T_{\text{ensaio}}$), resultando em a_T igualmente constante para cada uma das temperaturas de ensaio, o que pode ser facilmente inferido pela equação (2.3). Assim, o tempo reduzido é encontrado em função do tempo t por meio da equação (2.2):

$$\xi = \xi(t) = \int_0^t \frac{1}{a_T} d\tau = \frac{t}{a_T} \quad (2.4)$$

donde conclui-se que:

$$\log(\xi) = \log t - \log a_T. \quad (2.5)$$

O valor de $\log(\xi)$ corresponde ao deslocamento horizontal que deve sofrer a abscissa de cada par ordenado (t , $D(t)$) para a composição da curva mestra. Nesse sentido, pode-se exemplificar através das Tabelas 1 e 2 os valores para o $\log(a_T)$ e os deslocamentos para diferentes valores de tempo.

Tabela 1: Valores de $\log(a_T)$ para diferentes temperaturas.

-20°C	-10°C	5°C	20°C	40°C
5,660	4,083	1,932	0	-2,288

Finalmente, a coleção de curvas anteriormente mostrada resulta, após as translações horizontais, na curva mestra indicada na Figura 3, que tem a temperatura de 20°C como referência.

Tabela 2: Deslocamentos horizontais a serem realizados para alguns valores de tempo.

Valores de t	-20°C	-10°C	5°C	20°C	40°C
$1,0 \times 10^{-2}$	-7,66	-6,08	-3,93	-2,00	0,29
$1,0 \times 10^{-1}$	-6,66	-5,08	-2,93	-1,00	1,29
$1,0 \times 10^0$	-5,66	-4,08	-1,93	0,00	2,29
$1,0 \times 10^1$	-4,66	-3,08	-0,93	1,00	3,29
$1,0 \times 10^2$	-3,66	-2,08	0,07	2,00	4,29

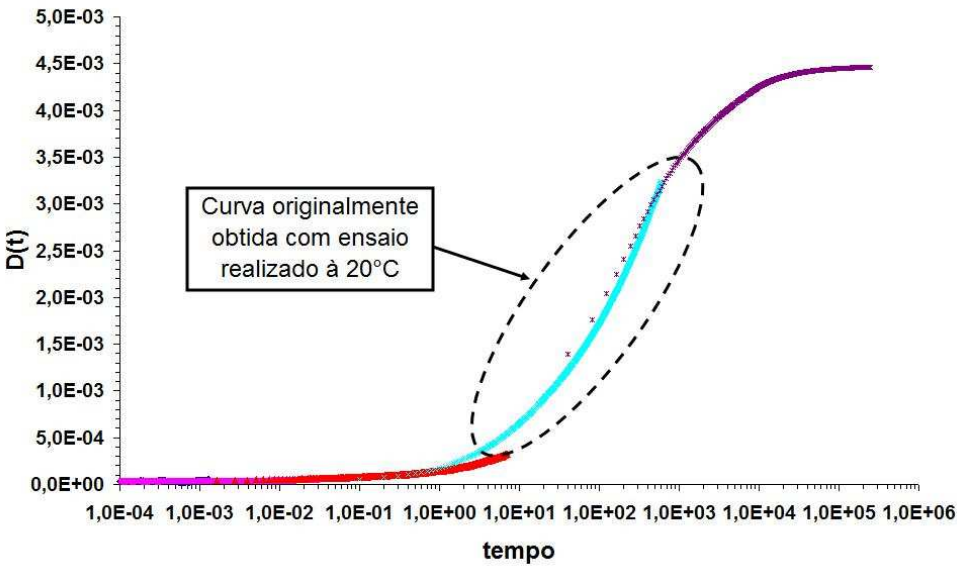


Figura 3: Curva mestra da compliância de uma mistura asfáltica para a temperatura de 20°C.

Ressalte-se que o mesmo raciocínio é usado para o módulo de relaxação, sendo a equação (2.5) válida também para este fenômeno. Para os ensaios dinâmicos do módulo complexo (E^*) e da compliância complexa (D^*), feitos a temperaturas constantes, um desenvolvimento análogo pode ser realizado para a obtenção de suas curvas mestras. No entanto, para esses casos, as curvas resultantes são traçadas em função da frequência solicitante.

2.3. Etapa 3

Terminada a montagem das curvas mestras, encontram-se, de acordo com o experimento realizado, as constantes D_0 (ensaio de *creep*) ou E_∞ (ensaio de relaxação). Estes valores são constantes necessárias para se poder continuar a execução do método da colocação e são obtidos pelas curvas mestras da compliância ou do módulo de relaxação, respectivamente. No caso da compliância, a curva apresenta um patamar inicial cujo valor corresponde a D_0 e que caracteriza o estado vítreo do material viscoelástico. Para obtenção de E_∞ , deve-se observar o patamar final (*rubbery state*) existente na curva mestra do módulo de relaxação (SCHAPERY, 1982). A Figura 4 permite uma visualização das constantes referidas.

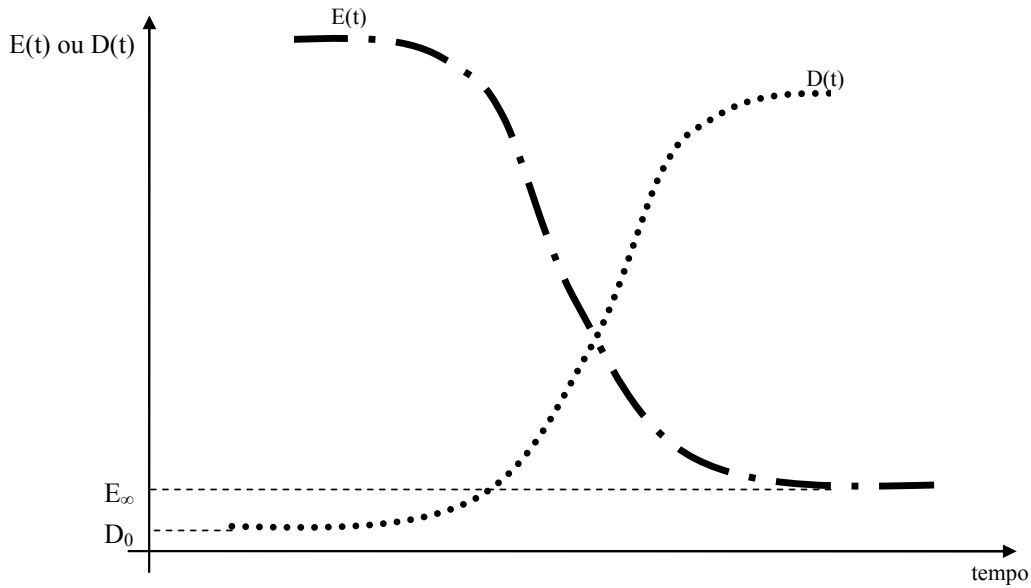


Figura 4: Curvas de compliância, $D(t)$, e módulo de relaxação, $E(t)$, com indicação dos valores de D_0 e E_∞ .

2.4. Etapa 4

Obtida a constante necessária, inicia-se o processo de obtenção da curva de ajuste aos dados experimentais. O ajuste é feito através das séries de Prony cujas formulações gerais são as seguintes para a compliância e para o módulo de relaxação, respectivamente:

$$D(t_i) = D_0 + \sum_{j=1}^N \left[D_j \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_i}{\tau_j}} \right) \right] \quad e \quad E(t_i) = E_\infty + \sum_{j=1}^N \left(E_j \cdot e^{-\frac{t_i}{\rho_j}} \right) \quad (2.6a) \text{ e } (2.6b)$$

Deve-se então observar a curva mestra para se determinar a margem de variação (Δ) da variável “t”. Para tanto, basta que se tome nota do menor e do maior valor de tempo que correspondem a algum valor experimental da compliância ou do módulo de relaxação. Feito isso, e escrevendo os valores em notação científica, faz-se a subtração entre as potências de dez do maior e do menor tempo e acrescenta-se um ao resultado. Assim, por exemplo, teria-se para os tempos $5,27 \times 10^5$ segundos (maior) e $1,58 \times 10^{-3}$ segundos (menor), que a margem de variação temporal é dada por $\Delta = 5 - (-3) + 1 = 9$.

2.5. Etapa 5

Das equações (2.6) verifica-se que há necessidade de se calcular os valores dos τ_j 's (ou dos ρ_j 's), além dos D_i 's (ou dos E_i 's), o que resultaria em um sistema de equações não linear. Portanto, é mais simples estimar os valores dos τ_j 's (ou dos ρ_j 's) para se obter, em seguida, os valores dos D_i 's e E_i 's (PARK e KIM, 2001). Antes dos valores de τ_j (ou ρ_j) serem estimados, deve-se analisar a Figura 5, que representa o formato geral da curva de compliância (semelhantemente pode-se observar a curva de relaxação).

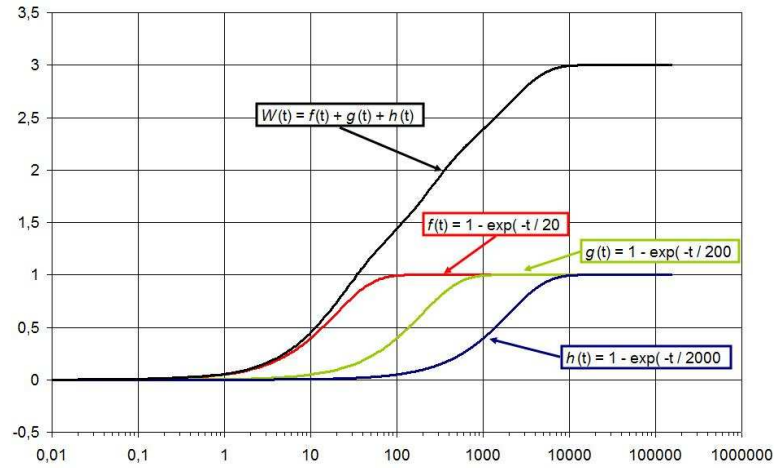


Figura 5: Exponenciais tipo $1 - e^{-t/\tau}$.

Nota-se que as variações significativas nas curvas das funções $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ ocorrem em intervalos equivalentes a uma década, situados em torno dos coeficientes τ_j (ρ_j , se for uma exponencial do tipo $e^{-t/\rho}$). Logo, se o k -ésimo coeficiente τ (ou ρ) estiver separado do seu antecessor por uma década, encontra-se uma curva suave, sem aparência de escada (SCHAPERLY, 1982).

Conseqüentemente, é fácil observar que “ t ” leva a variações significativas nessas funções exponenciais somente se estiver variando no referido intervalo de uma década em torno de τ_j (ou ρ_j). Assim, escolhem-se $N = \Delta - 2$ (de acordo com a notação da etapa anterior) pares ordenados do tipo $(t, D(t))$ ou $(t, E(t))$ tais que $\frac{t_{i+1}}{t_i} \cong 10$ e, em seguida, escolhem-se os N coeficientes τ_j (ou ρ_j). Algumas restrições são impostas em relação à escolha destes coeficientes:

- (i) Os primeiros “ t ’s” e τ ’s (ou ρ ’s) a serem escolhidos devem estar, ambos, uma década acima do menor valor experimental de tempo;
- (ii) Os coeficientes também devem estar espaçados entre si segundo a razão: $\frac{\tau_{j+1}}{\tau_j} \cong 10$;
- (iii) Os últimos valores de “ t ” e de τ (ou de ρ) devem estar uma década abaixo do maior valor experimental de tempo;
- (iv) Finalmente, τ_k (ou ρ_k) deve ser escolhido de modo que o k -ésimo termo da série atinja um valor superior à metade do seu máximo para um t_k escolhido (SCHAPERLY, 1982). Logo, tem-se:

$$D_k \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_k}{\tau_k}} \right) > \frac{1}{2} D_k \therefore \tau_k < 1,44 \cdot t_k$$

O mesmo princípio é válido na obtenção dos ρ_j ’s.

2.6. Etapa 6

Nesta etapa, toma-se a decisão quanto à realização de uma pré-suavização dos dados antes de se efetuar o método da colocação propriamente dito. Caso seja feita a escolha pela realização da suavização, passa-se a etapa 7. Do contrário, prossegue-se para etapa 10-B. A suavização é

recomendada, pois evita o aparecimento de coeficientes D_i negativos nas expressões da série de Prony. É importante, entretanto, que estes coeficientes sejam sempre positivos, pois estão relacionados a constantes de molas e amortecedores de modelos mecânicos que foram concebidos para descrever os fenômenos viscoelásticos. Para maior compreensão deste fato, ver SOUZA e SOARES (2003). Esses coeficientes, quando negativos, não têm significado físico (PARK e KIM, 2001) e, portanto, a equação obtida não é considerada um bom resultado. Além disso, a suavização impede o surgimento de eventuais ondulações no gráfico, que são tão grandes quanto for a dispersão dos valores experimentais.

A suavização é na verdade a obtenção de uma equação para a curva dos dados experimentais. O leitor deve se perguntar se não se trata de uma redundância já que este é precisamente o objetivo da obtenção da série de Prony, que também é uma curva para os dados experimentais. Portanto, ao se optar pela suavização se está na verdade fazendo um esforço duplo. Este é justificado pelo fato da série de Prony obtida diretamente de dados experimentais comumente possuir coeficientes negativos, o que é indesejado conforme mencionado anteriormente. Ao mesmo tempo, optar simplesmente por uma lei de potência traz o inconveniente de maior esforço computacional, uma vez que economia de esforço computacional é justamente o grande benefício da série de Prony em análises viscoelásticas. Daí justificar-se o duplo esforço de se obter (i) primeiramente a curva baseada em lei de potência para suavizar os dados experimentais, e (ii) posteriormente a série de Prony a partir da lei de potência.

2.7. Etapa 7

Nessa etapa, inicia-se o processo de suavização dos dados através do uso de séries de leis de potências modificadas (MPL), mostradas a seguir:

$$D'(t) = D_0 + \sum_{i=1}^N \frac{D'_i}{\left(1 + \frac{\tau_i}{t}\right)^n} \quad \text{e} \quad E'(t) = E_\infty + \sum_{i=1}^N \frac{E'_i}{\left(1 + \frac{t}{\rho_i}\right)^n} \quad (2.7a) \text{ e } (2.7b)$$

Os coeficientes D'_i (e E'_i) são encontrados pelo método dos mínimos quadrados, através do sistema linear $[A] \cdot \{D'\} = \{r\}$, que será montado nas instruções que seguem.

Depois de selecionados os N pares ordenados, os N coeficientes τ 's (ou ρ 's) e tendo-se determinado o valor de D_0 (ou de E_∞), deve-se montar o vetor coluna $\{r\}$, de dimensão N , dado a seguir, respectivamente, para a compliância e para fluência:

$$r_i = \sum_{k=1}^M \left[(D'(t_k) - D_0) \cdot \left(1 + \frac{\tau_i}{t_k}\right)^{-n} \right] \quad \text{e} \quad r_i = \sum_{k=1}^M \left[(E'(t_k) - E_\infty) \cdot \left(1 + \frac{t_k}{\rho_i}\right)^{-n} \right] \quad (2.8a) \text{ e } (2.8b)$$

onde M é o total de pontos dados pelo ensaio; $D'(t_k)$ corresponde aos valores experimentais da compliância para cada t_k ; n é a potência intrínseca à formulação, assumindo normalmente o valor dois; e τ_i e ρ_i são aos coeficientes escolhidos segundo os três primeiros critérios apresentados na etapa 5, podendo, inclusive, assumirem os valores de τ_i e ρ_i , de tal forma que $\hat{\tau}_1 \leq \tau_1$ e $\hat{\tau}_N \geq \tau_N$. Essa última restrição deve-se ao fato do ajuste feito pela MPL só garantir resultados confiáveis para tempos " t " tais que $\hat{\tau}_1 \leq t \leq \hat{\tau}_N$.

2.8. Etapa 8

Nesse momento deve-se montar a matriz $[A]$, de dimensão N^2 , cujos elementos são dados por:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^M \left[\left(1 + \frac{\hat{\tau}_i}{t_k} \right)^{-n} \cdot \left(1 + \frac{\hat{\tau}_j}{t_k} \right)^{-n} \right] \text{ e } a_{ij} = \sum_{k=1}^M \left[\left(1 + \frac{t_k}{\hat{\rho}_i} \right)^{-n} \cdot \left(1 + \frac{t_k}{\hat{\rho}_j} \right)^{-n} \right] \quad (2.9a) \text{ e } (2.9b)$$

para o caso da compliância e para o módulo de relaxação, respectivamente.

2.9. Etapa 9

Este passo consiste na resolução do sistema linear cujas incógnitas são os coeficientes D_i' (ou E_i') da expressão dada pela MPL, ou seja, busca-se a solução para $[A] \cdot \{D'\} = \{r\}$ (ou, no caso do módulo de relaxação, $[A] \cdot \{E'\} = \{r\}$). O vetor $\{D'\}$ (assim como $\{E'\}$) é, portanto, de dimensão N e suas componentes são as incógnitas do problema, i.e., D_i' (ou E_i').

Como N , número de equações do sistema, não é, via de regra, um número grande, recomenda-se a utilização de métodos simples para a resolução do sistema. O método de Gauss, por exemplo, é uma boa alternativa, mesmo que seu custo computacional seja elevado, pois, para pequenos sistemas lineares, a diferença entre os métodos numéricos não é significativa.

2.10. Etapa 10

Este passo consiste na montagem do vetor $\{r\}$, de dimensão N , que será usado nos cálculos finais para a determinação dos coeficientes D_i das equações das séries de Prony. Existem, no entanto, duas possibilidades para a execução dessa etapa, que serão explicitadas a seguir.

2.10.1. Etapa 10-A

Esta sequência de procedimentos é referente à escolha pela suavização de dados. Dessa forma, uma vez determinada a expressão completa da compliância (ou do módulo de relaxação) dada pela MPL, deve-se partir para o cálculo das equações (2.6). Na sequência dos cálculos, faz-se necessária a criação de um novo vetor coluna $\{r\}$.

A componente r_i do vetor passa a ser da forma:

$$r_i = D'(t_i) - D_0 \text{ e } r_i = E'(t_i) - E_\infty \quad (2.10a) \text{ e } (2.10b)$$

para a compliância e para o módulo de relaxação, respectivamente. Para os novos r_i , no entanto, deve-se atentar para o valor de $D'(t_i)$ e de $E'(t_i)$, já que, agora, estes não são dados mais pelos valores experimentais, mas pela equação analítica da lei de potência.

2.10.2. Etapa 10-B

Este passo trata da montagem do vetor $\{r\}$ no caso de se ter escolhido pela não realização da suavização. Assim, tem-se:

$$r_i = D(t_i) - D_0 \text{ e } r_i = E(t_i) - E_\infty \quad (2.10c) \text{ e } (2.10d)$$

para a compliância e para o módulo de relaxação.

No que concerne as equações (2.10c) e (2.10d), deve-se deixar claro que os $D(t_i)$ e de $E(t_i)$ são dados pelos valores experimentais.

2.11. Etapa 11

O próximo passo a ser tomado refere-se à montagem da matriz quadrada $[B]$, de dimensão N^2 . Esta matriz é dada por:

$$[B] = \left(1 - e^{-\frac{t_i}{\tau_j}} \right) = \begin{bmatrix} 1 - e^{-\frac{t_1}{\tau_1}} & 1 - e^{-\frac{t_1}{\tau_2}} & \dots & 1 - e^{-\frac{t_1}{\tau_N}} \\ 1 - e^{-\frac{t_2}{\tau_1}} & 1 - e^{-\frac{t_2}{\tau_2}} & \dots & 1 - e^{-\frac{t_2}{\tau_N}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 - e^{-\frac{t_N}{\tau_1}} & 1 - e^{-\frac{t_N}{\tau_2}} & \dots & 1 - e^{-\frac{t_N}{\tau_N}} \end{bmatrix} \quad (2.11a)$$

para a compliância. No caso do módulo de relaxação, b_{ij} é dado por:

$$b_{ij} = e^{-\frac{t_i}{\tau_j}}. \quad (2.11b)$$

2.11.1. Etapa 11-A

Refere-se à montagem da matriz $[B]$ caso se tenha escolhido pela realização de uma pré-suavização.

2.11.2. Etapa 11-B

Concerne o mesmo problema da etapa 11-A, no entanto, refere-se à solução sem pré-suavização.

2.12. Etapa 12

De posse de $[B]$ e de $\{r\}$, resolve-se o sistema de equações lineares dado por $[B] \cdot \{D\} = \{r\}$ (ou $[B] \cdot \{E\} = \{r\}$, conforme seja o caso). Assim como indicado na Etapa 9, o método de Gauss para a resolução de sistemas lineares é adequado. Outros métodos computacionalmente mais econômicos não são necessários devido ao tamanho reduzido do sistema montado. Determinam-se, então, os coeficientes D_i e E_i das séries de Prony para a compliância e para o módulo de relaxação. Feito isso, as equações (2.6) estão finalmente determinadas por completo.

2.13. Etapa 13

Como etapa final do método da colocação, traça-se a curva obtida com a equação analítica dada pela série de Prony juntamente com os resultados experimentais para verificar adequação do ajuste realizado.

3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este artigo possui uma pretensão tutorial relativa a um importante método de obtenção de uma curva de ajuste (série de Prony) compatível com dados experimentais de caracterização viscoelástica. A importância de uma maior compreensão deste método no nosso país é diretamente ligada à importância que a caracterização viscoelástica de misturas e ligantes vem ganhando no Brasil e no mundo. Apesar da simplicidade, o método da colocação mostra resultados cujas correlações atingem valores muito próximos de um. A literatura aponta claramente que as curvas resultantes são condizentes com os experimentos, principalmente caso se tenha feito a pré-suavização dos dados experimentais. Ademais, tanto os cálculos a

serem realizados, quanto a equação analítica encontrada, podem ser facilmente operados computacionalmente. Vale ainda lembrar que os coeficientes obtidos para as equações determinadas com pré-suavização são comumente positivos, o que significa um bom ajuste e uma adequada representação do fenômeno físico. Além disso, deve-se notar também que é possível se prever as outras grandezas características do comportamento viscoelástico do material a partir da equação encontrada, conforme mencionado na introdução. Assim, tomando-se como exemplo o cálculo da compliância $[D(t)]$, é possível se encontrar as expressões para a compliância complexa $[D^*(j\omega)]$, o módulo complexo $[E^*(j\omega)]$ e o módulo de relaxação $[E(t)]$. Todas essas grandezas podem ser obtidas por conversões feitas a partir de apenas uma delas, através de cálculos que são simplificados pela própria natureza das expressões das séries de Prony.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BUTTLAR, W. G.; ROQUE, R. e REID, B. (1998) Automated Procedure for Generation of Creep Compliance Master Curve for Asphalt Mixtures. Transportation Research Record n. 1630, p 28-36., University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, IL, EUA.
- CHRISTENSEN, R. M. (1982) Theory of Viscoelasticity. Academic Press, New York, EUA.
- EVANGELISTA JR, F.; PARENTE JR, E.; HOLANDA, A.S.; ARAUJO, T.D.P.; e SOARES, J.B. (2006) Análise quase-estática e dinâmica de pavimentos asfálticos. ANPET, Brasília-DF.
- FINDLEY W. N.; LAI J. S.; ONARAN K. (1989) Creep and relaxation of nonlinear viscoelastic materials. Dover Publications, Inc. New York.
- HUANG, Y. H. (2004). Pavement analysis and design. Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ, EUA.
- LAKES, R. (1998) Viscoelastic Solids. CRC Press, Boca Raton, Flórida, EUA.
- MEDANI, T. O. e HUURMAN, M. (2003) Constructing the stiffness master curves for asphaltic mixes. Delft University of Technology, Faculty of Civil Engineering and GeoSciences, Road and Railroad Research Laboratory & Steel and Timber Structures, USA.
- MEDEIROS JÚNIOR, M. S. (2006) *Caracterização mecânica de misturas asfálticas por meio de módulo dinâmico*. Dissertação de mestrado. Universidade Federal do Ceará, Fortaleza – CE, Brasil.
- MEDEIROS JÚNIOR, M. S. e SOARES, J. B. (2006) *Obtenção do módulo dinâmico a partir de ensaios de creep*. Revista de Engenharia Civil, Universidade do Minho, Portugal.
- MOMM, L. (2001) *Comportamento viscoelástico do concreto asfáltico*. Anais da 33ª reunião anual de pavimentação, ABPV, Florianópolis – SC. p. 223-231.
- OLARD, F. (2003) Comportement thermomécanique des enrobés bitumineux à basses température: relations entre les propriétés du liant et de l'enrobé. Tese de doutorado. L'institut National des sciences appliquées de Lyon, Lyon, França.
- PARK, S. K. e KIM, Y. R. Fitting Prony-Series Viscoelastic Models With Power-Law Presmoothing. Journal of Materials in Civil Engineering. January/February 2001.
- ROBERTS, F. L.; KANDHAL, P. S.; BROWN, E. R.; LEE, D. Y. e KENNEDY, T. W. (1996) Hot mix asphalt materials, mixture design, and construction. NAPA Education Foundation. Lanham, Maryland, EUA.
- SCHAPERY, R. A. (1982) Theory of viscoelasticity, Lecture notes. Não publicado.
- SOARES, J. B. e SOUZA, F. (2002) *Verificação do comportamento viscoelástico linear em misturas asfálticas*. Anais do Instituto Brasileiro de Gás e Petróleo – IBP.
- SOUZA, F. S. e SOARES, J. B. (2003) *Previsão do comportamento mecânico de misturas asfálticas a partir dos resultados do ensaio de creep estático*. In: CNT/ANPET (org.) / LGE (ed.) Transporte em Transformação VII – Trabalhos vencedores do prêmio CNT Produção Acadêmica 2002, Brasília, Brasil.
- SOUZA, F. (2005) *Modelo multi-escala para análise estrutural de compósitos viscoelásticos suscetíveis ao dano*. Dissertação de mestrado. Universidade Federal do Ceará, Fortaleza – CE, Brasil.

Pedro Cavalcanti de Sousa (pedro_sousa203@yahoo.com.br)

Jorge Barbosa Soares (jsoares@det.ufc.br)

Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia – Campus do Pici, S/ N°

Departamento de Engenharia de Transportes, DET Bloco: 703 CEP: 60.455-760

Fortaleza - Ceará – Brasil