UMA ABORDAGEM HEURÍSTICA PARA UM PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO COMPETITIVA DE HUBS

Marcos Roboredo
Helder Gomes Costa
Universidade Federal Fluminense
Departamento de Engenharia de Produção

RESUMO
No problema aqui estudado, duas firmas não cooperativas, líder e seguidora, localizam hubs sequencialmente visando maximizar o seu próprio fluxo a ser transportado através de um sistema. A líder localiza p hubs sabendo que a seguidora reagirá localizando r hubs. Após as decisões de localização, cada fluxo será transportado utilizando um único hub ou um par de hubs localizados ou pela líder ou pela seguidora, de acordo com o critério do menor custo. Este trabalho propõe uma abordagem heurística para o problema de otimizar a decisão da líder. A heurística aqui proposta é comparada com a heurística da literatura.

ABSTRACT
In the problem here studied, two noncooperative firms, leader and follower, locate hubs sequentially in order to maximize their own total flow being transported through a system. The leader locates p hubs, knowing that the follower will react by locating r hubs. After location decisions, each flow is transported by one hub or a pair of hubs placed by either leader or follower according to the lowest cost criterion. The problem consists of optimizing the leader decision. This paper proposes a heuristic approach for optimizing the leader decision. The heuristic here proposed is compared with the heuristic of the literature.

1. INTRODUÇÃO

Hubs são facilidades especiais que atuam principalmente como pontos de consolidação em sistemas de transporte em que fluxos associados a diversos pares origem-destino (O/D) devem ser transportados. Diferentes fluxos podem ser agregados e transportados através de hubs antes de chegar aos seus destinos, visando diminuir o custo total de transporte uma vez que existe um desconto no custo unitário de transporte entre hubs. Este tipo de sistema de transporte possui diversas aplicações, como por exemplo em sistemas aéreos (Button, 2002), logísticos (Ishfaq e Sox, 2011) e de telecomunicações (Kim e O'Kelly, 2009).

No Problema de Localização de Hubs (PLH), duas decisões são tomadas visando minimizar o custo total de transporte. A primeira delas é onde um número finito de hubs deve ser localizado e a segunda é como será feita a alocação de pontos não hub a hubs. Cada PLH pode ser classificado em alocação simples (AS-PLH) ou alocação múltipla (AM-PLH), de acordo com o tipo de alocação considerada. Nos AS-PLH, cada ponto não hub deve ser atribuído a um único hub enquanto nos AM-PLH, cada ponto não hub pode ser alocado a quantos hubs forem necessários. Cada PLH pode ser classificado ainda como discreto ou contínuo. Nos PLH discretos, o conjunto de potenciais hubs é discreto enquanto nos PLH contínuos, os hubs podem ser alocados em qualquer ponto do espaço de decisão. Para uma visão mais global a respeito de definições, variantes, modelos e algoritmos para PLH, sugerimos a leitura de Alumur e Kara (2008), Campbell e O'Kelly e Farahani *et al* (2013).

Em grande parte da literatura sobre PLH, a decisão de localização não considera existentes ou potenciais competidores oferecendo o mesmo produto ou serviço. No entanto, este tipo de cenário acontece em diversas situações práticas. Este trabalho estuda um PLH onde a competição entre duas firmas é considerada. Tal problema é definido da seguinte maneira. Considere um duopólio envolvendo duas firmas não cooperativas, líder e seguidora, tomando cada uma delas uma decisão de localização de maneira sequencial. A primeira firma a tomar a decisão de localização é a líder, que decide onde p hubs devem ser localizados, sabendo que a firma seguidora reagirá localizando r hubs. Depois que as duas firmas tomam suas decisões, o fluxo associado a cada par O/D será transportado via um hub localizado ou via um par de hubs localizados pela firma que oferecer o menor custo. Ambas as firmas visam maximizar o seu total fluxo transportado. O problema (r/p) hub-centróide ((r/p)HC) consiste em otimizar a decisão da líder.

O (r/p)HC é um problema de otimização em dois níveis e foi formalmente proposto em Mahmutogullari e Kara (2016), onde os autores focaram na versão discreta com alocação múltipla do problema. Os autores provaram que o problema é NP-Difícil e propuseram um algoritmo exato de Enumeração Implícita (EI) para o problema. Os autores aplicaram o algoritmo EI em diversas instâncias com até 253 pares de hubs, 3240 pares O/D e p = r = 5.

Ghaffarinasab *et al* (2018) também estudaram o (r/p)HC discreto. Os autores propuseram heurísticas de arrefecimento simulado tanto para versão com alocação simples quanto para versão com alocação múltipla. Os algoritmos foram aplicados nas mesmas instâncias usadas em Mahmutogullari e Kara (2016) mas considerando que p e r poderiam variar até 14.

Recentemente, Araujo *et al* (2019) revisitaram a versão discreta com alocação múltipla do (r/p)HC, onde algumas importantes contribuições foram dadas: os autores provaram que o problema é $\sum_2^p difícil$ e propuseram duas reformulações de um único nível e dois algoritmos *branch-and-cut* (B&C) exatos para o problema. Os algoritmos foram comparados ao algoritmo EI, onde os resultados mostraram que os algoritmos B&C foram mais rápidos para a maioria das instâncias, especialmente as maiores. Os autores apresentaram ainda a solução ótima de diversas instâncias pela primeira vez na literatura com até 820 pares de hubs, 820 pares O/D e p = r = 10.

Este trabalho também foca na versão discreta com alocação múltipla do (r/p)HC, onde é proposta uma heurística híbrida para o problema. Em cada iteração desta heurística, algumas soluções são geradas através da resolução de modelos de programação linear inteira mista (PLIM). A melhor das soluções prévias é submetida a uma busca local. Para evitar que o algoritmo fique preso em ótimos locais, uma lista guarda as principais soluções e durante todo o algoritmo existem restrições que impedem que as soluções da lista sejam revisitadas. A heurística aqui proposta é comparada tanto com o método heurístico quanto com os métodos exatos existentes na literatura, onde os resultados mostram que o algoritmo proposto encontra a solução ótima significativamente mais rápido do que os demais algoritmos em todas as instâncias comparadas.

2. DEFINIÇÃO FORMAL DO (R|P)HC

Esta seção apresenta uma definição formal para o (r/p)HC discreto com alocação múltipla. De agora em diante, este problema será referido apenas como (r/p)HC.

Seja G = (N,A) um grafo, onde N e A denotam respectivamente o conjunto de nós e arcos. Seja ainda um conjunto H⊆ N representando os potenciais hubs. Cada arco $(i,j) \in$ A representa um par O/D com um fluxo associado denotado por w_{ij} e que deve ser transportado de i para j. Pode-se assumir sem perda de generalidade que A = N ×N. Cada fluxo w_{ij} é transportado através de uma rota envolvendo um único hub localizado ou uma rota envolvendo um par de hubs localizados, de acordo com o menor custo. O custo de um par O/D (i,j) ser transportado via um par de hubs localizados (k, m) é denotado por c_{ijkm} e calculado de acordo com a Equação (1).

$$c_{ijkm} = \min\{\chi d_{ik} + \alpha d_{km} + \gamma d_{jm},\ \chi d_{im} + \alpha d_{mk} + \delta d_{kj}\} \quad (1)$$

Em que a matriz d é composta pela distância entre os nós da rede e α, χ e δ são parâmetros não negativos menores representando respectivamente o desconto entre hubs e os fatores de distribuição e recebimento. Geralmente, tem-se $\alpha \leq 1$ e $\chi, \delta \geq 1$. Quando $k = m$, a fórmula continua válida e neste caso o transporte usa um único hub.

Duas firmas, líder e seguidora, competem pelo transporte dos fluxos. A líder localiza p hubs sabendo que, em seguida, a seguidora reagirá localizando r hubs. Após as decisões de localização, cada par O/D é servido por um hub ou um par de hubs localizados por uma das firmas, de acordo com o menor custo. Empates são quebrados arbitrariamente em favor da líder. O (r/p)HCP consiste em otimizar a estratégia da líder.

Para uma definição matemática do (r/p)HCP, sejam L e F os conjuntos das possíveis estratégias da líder e da seguidora, respectivamente. Matematicamente, $\mathcal{L} = \{L \subseteq H \| L| = p\}$ e $\mathcal{F} = \{F \subseteq H \| F| = p\}$. Para cada $L \in \mathcal{L}$ e $F \in \mathcal{F}$, seja $\Delta(L, F)$ o conjunto de pares O/D servidos pela líder dadas as estratégias L e F. Matematicamente, tem-se:

$$\Delta(L, F) = \left\{(i, j) \in N \times N \middle| min_{k,m \in L}\{c_{ijkm}\} \leq min_{k,m \in F}\{c_{ijkm}\}\right\} \quad (2)$$

Agora, seja $fluxo(L, F)$ o fluxo total servido pela líder quando líder e seguidora adotam respectivamente as estratégias L e F. Matematicamente, $fluxo(L, F)$ é calculado da seguinte maneira:

$$fluxo(L, F) = \sum_{(i,j) \in \Delta(L,F)} w_{ij} \quad (3)$$

Como todos os fluxos são servidos por uma das firmas, pode-se afirmar que maximizar o fluxo servido por uma firma é equivalente a minimizar o fluxo servido pela outra. Com base neste fato, o (r|p)HC pode ser visto como:

$$max_{L \in \mathcal{L}} min_{F \in \mathcal{F}} fluxo(L, F) \quad (4)$$

O (r/p)HC possui uma grande dificuldade de resolução até mesmo para métodos heurísticos uma vez que para se avaliar o valor da função objetivo de uma dada solução $L \in \mathcal{L}$ é necessário resolver o problema de otimização de encontrar a estratégia $F \in \mathcal{F}$ que minimiza $fluxo(L, F)$. Tal problema pode ser resolvido através do um modelo PLIM idêntico ao usado em Araujo *et al* (2019). Por falta de espaço, omitimos a descrição matemática deste modelo. Dada uma estratégia $L \in \mathcal{L}$ qualquer. A solução ótima da seguidora gerada pela resolução do modelo PLIM é denotada neste trabalho por $F^*(L)$.

Como já comentado anteriormente, o fato de ser necessário resolver um problema de otimização combinatória para encontrar o valor na função objetivo de uma dada solução $L \in \mathcal{L}$ qualquer faz com que o (r/p)HC seja de difícil resolução. Assim, durante a execução de uma heurística para o problema, qualquer propriedade do mesmo que possa evitar algumas execuções do modelo PLIM reduz o tempo computacional final de resolução. Neste contexto, a Proposição 1 apresenta uma condição que, quando satisfeita para uma dada solução $L \in \mathcal{L}$, tem-se a certeza de que esta solução não é ótima sem a necessidade da resolução modelo PLIM.

Proposição 1 Sejam $L \in \mathcal{L}$ e $F \in \mathrm{F}$ quaisquer. Seja ainda LB um limite inferior viável para o (r/p)HC. Se $fluxo(L, F) < LB$ então L não é ótima.

Prova: Sejam $L \in \mathcal{L}$ e $F \in \mathrm{F}$ quaisquer. Seja ainda LB um limite inferior viável para o problema tal que $fluxo(L, F) < LB$. Para a conclusão da prova, deve-se mostrar que $fluxo(L, F^*(L)) < LB$.

Por definição, $F^*(L)$ é a solução da seguidora que minimiza o fluxo servido pela líder dada a solução L. Assim, $fluxo(L, F^*(L)) < fluxo(L, F)$. Logo, por transitividade, tem-se $fluxo(L, F^*(L)) < LB$, mostrando que L não é ótima.■

3. HEURÍSTICA PROPOSTA

3.1. O algoritmo principal

Os passos da heurística estão descritos no Algoritmo 1. Tal algoritmo recebe um parâmetro inteiro positivo $iter$ indicando o número de vezes que o algoritmo será executado.

Algoritmo 1 Heurística($iter$)

1: $Lista \leftarrow \emptyset$
2: $L^* \leftarrow \emptyset$
3: $opt \leftarrow 0$
4: **para** $k = 1, \ldots, iter$ **faça**
5: $\quad L_0 \leftarrow Solucao(Lista)$
6: $\quad$ **se** $fluxo(L_0, F^*(L_0)) > opt$ **então**
7: $\qquad L^* \leftarrow L_0$
8: $\qquad opt \leftarrow fluxo(L_0, F^*(L_0))$
9: $\quad$ **fim se**
10: $\quad L \leftarrow BL(L_0, Lista)$
11: $\quad$ **se** $fluxo(L, F^*(L)) > opt$ **então**
12: $\qquad L^* \leftarrow L$
13: $\qquad opt \leftarrow fluxo(L, F^*(L_0))$
14: $\quad$ **fim se**
15: **fim para**
16: **Retorna** opt

Algoritmo 1: Algoritmo principal

Ao final da heurística, a melhor solução obtida é armazenada na variável L^* e o fluxo total servido pela líder associado a esta solução é armazenado na variável opt. Para cada iteração da heurística, uma solução inicial L_0 é gerada através da função $Solucao$ (Passo 5) e, em seguida, tal solução é submetida a uma busca local representada pela função BL (Passo 10), gerando uma nova solução L. Tanto a função $Solucao$ quanto a função BL recebem uma lista de soluções representada pela variável $Lista$ e possuem restrições que garantam que a solução gerada pelas mesmas seja diferente de todas as soluções da lista. Tal lista é atualizada dentro destas funções. Em diversos passos da heurística, se faz necessário o cálculo do fluxo total servido pela líder dada uma solução $L \in \mathcal{L}$ denotado por $fluxo(L, F^*(L))$, que é feito através da resolução do PLIM idêntico ao usado em Araujo *et al* (2019). As Seções 3.2 e 3.3 apresentam detalhes das funções $Solucao$ e BL, respectivamente.

3.2. Gerador de soluções (função Solucao)

Conforme visto anteriormente, em cada iteração da heurística proposta, uma solução é gerada através de um modelo PLIM. Este modelo considera as constantes φ_{ij}^l, indicando o l-ésimo par de potenciais hubs mais barato em relação ao par O/D (i,j). Estas constantes também consideram o caso em que o par de hubs é composto por dois hubs iguais, indicando que (i,j) é servido por um único hub. O modelo PLIM utiliza ainda as constantes hub_1e hub_2 usadas para representar respectivamente o primeiro e o segundo hub de um dado par de hubs.

O modelo PLIM recebe um parâmetro inteiro positivo k e uma lista de soluções $Lista$ e encontra a estratégia de localização não pertencente a $Lista$ que maximiza o fluxo total servido pela líder considerando que um dado par O/D (i,j) é servido pela líder somente se esta firma localiza φ_{ij}^k ou qualquer outro par de hubs mais barato em relação este par O/D. Toda vez que a função Solucao é chamada, são testados $k = 2$, $k = 3$ e $k = 4$ e retorna a melhor dentre as três soluções associadas. A seguir, tem-se as variáveis e a formulação associadas ao modelo PLIM:

$x_l \rightarrow$ variável binária indicando se a líder localiza um hub em $l \in H (x_l = 1)$ ou não $(x_l = 0)$.

$y_{lm} \rightarrow$ varíavel binária que assume valor 1 se $x_l = 1$ e $x_m = 1$.

$z_{ij} \rightarrow$ variável binária que assume valor 1 se a líder serve o par O/D (i,j), ou seja, se a líder localiza pelo menos 1 dentre os pares de hub φ_{ij}^1, φ_{ij}^2, ..., ou φ_{ij}^k.

$$Max \sum_{(i,j)\in N\times N} w_{ij} z_{ij} \tag{5}$$
s.a
$$\sum_{l\in H} x_l = p \tag{6}$$
$$y_{lm} \le x_l, \quad \forall l,m \in H \tag{7}$$
$$y_{lm} \le x_m, \quad \forall l,m \in H \tag{8}$$
$$z_{ij} \le \sum_{k'=1}^{k} y_{hub_1\left(\varphi_{ij}^{k'}\right) hub_2\left(\varphi_{ij}^{k'}\right)}, \forall (i,j) \in N \times N \tag{9}$$
$$\sum_{l\in L_0} x_l \le p - 1, \forall L_0 \in Lista \tag{10}$$
$$x_l \in \{0,1\}, \forall l \in H \tag{11}$$
$$y_{lm} \in \{0,1\}, \forall l,m \in H \tag{12}$$
$$z_{ij} \in \{0,1\}, \forall (i,j) \in N \times N \tag{13}$$

A função objetivo (5) visa otimizar o fluxo total servido pela líder. As restrições (7) e (8) garantem a definição das variáveis y. As restrições (9) garantem que um par O/D (i,j) é somente considerado servido pela líder ($z_{ij} = 1$) se esta firma localiza φ_{ij}^1, φ_{ij}^2, ..., ou φ_{ij}^k. As restrições (10) garantem que a estratégia gerada pelo modelo não pode pertencer a $Lista$. As variáveis z_{ij} podem ser declaradas como contínuas deste que se incluam as restrições $z_{ij} \le 1, \forall (i,j) \in N \times N$.

3.3. Busca Local (função BL)
Conforme visto no Algoritmo 1, toda vez que uma solução L_0 é gerada através da função$Solucao$, esta solução é submetida a uma busca local representada pela função BL. Esta busca local simplesmente testa todas as soluções formadas por uma troca simples envolvendo um hub da solução L_0 com um potencial hub fora desta solução. Caso alguma troca gere ganho para líder, a solução L_0 é atualizada e o procedimento de trocas se inicia novamente. A Busca Local para quando não se consegue mais melhoras através das trocas. A melhor das soluções obtida através das trocas é retornada na solução L.

4. EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS
Todos os experimentos foram realizados em um computados Intel Core i7-4790 com 3.60GHz de CPU e 16GB de RAM, usando Windows 8.1 como sistema operacional. A linguagem de programação utilizada foi a C++, compilada com a IDE visual studio 2015. As resoluções do PLIM associado ao seguidor e da formulação da função Solucao foram realizadas pelo resolvedor CPLEX 12.7. Para este resolvedor, foi modificado um de seus parâmetros, a fim de garantir que apenas um única *thread* fosse utilizada.

4.1. Geração das instâncias
A heurística foi testada em instâncias geradas a partir dos conjuntos de dados TR e AP, que são bastante conhecidos na literatura de localização de hubs.

O conjunto TR foi proposto por Tan e Kara (2007) e é baseado no transporte de carga entre 81 cidades da Turquia. Este conjunto fornece a distância e o fluxo existente entre cada par de cidades. Foram escolhidas 22 destas 81 cidades para representar os potenciais hubs (|H| = 22). Estes 22 potenciais hubs são os mesmos utilizados por diversos trabalhos, incluindo Mahmutogullari e Kara (2016), Ghaffarinasab *et al* (2018) e Camargo *et al* (2019). O conjunto N é composto por todos os 81 pontos. Assim, cada par de cidades representa um par O/D.

O conjunto AP foi proposto por Ernst1 e Krishnamoorthy (1996) e é baseado na entrega de postagens na cidade de Sydney na Austrália. O conjunto original possui 200 pontos e apresenta a distância e fluxo entre todos os possíveis pares de pontos. No entanto, neste trabalho foi utilizado um conjunto reduzido com 40 pontos, gerados de acordo com esquema de agregação de pontos proposto pelos mesmos autores. Foi considerado aqui que N = H = 40, ou seja, cada par de pontos é um par O/D e cada ponto é um potencial hub.

Foram geradas 75 diferentes instâncias para cada conjunto de pontos variando $\alpha \in \{0.6, 0.8, 0.9\}$ e $p, r \in \{6, 8, 10, 12, 14\}$, totalizando 150 instâncias. Os valores de χ e δ foram considerados unitários. Todas as instâncias usadas neste trabalho podem ser encontradas em www2.logis.uff.br/~roboredo/instances.html.

Para ambos conjunto de dados, os fluxos foram normalizados dividindo cada um deles pela soma total dos fluxos. Uma importante característica dos conjuntos é que a matriz de distâncias é simétrica e foi considerado em todos os testes que $\chi = \delta = 1$. Consequentemente, os pares (i, j) e (j, i) podem ser agregados em um único par com fluxo $w_{ij} + w_{ji}$. Além disso, no conjunto TR, não existe fluxo de um ponto i para ele mesmo. Assim, este tipo de par não foi criado para este conjunto de dados. Com base nas características prévias, antes da execução da heurística, um módulo de pré-processamento é aplicado a fim de reduzir o número de pares

O/D. O número de pares O/D remanescente após a redução é 3240 e 820 nas instâncias TR e AP respectivamente.

4.2. Calibragem da Heurística

Em um primeiro momento, o método proposto foi executado nas 150 instâncias, a fim de se identificar qual o número máximo de iterações para se encontrar todas as soluções ótimas. Os seguintes resultados foram encontrados: executando apenas 1 iteração, foram encontradas todas as soluções ótimas das 75 instâncias TR e 66 soluções ótimas das 75 instâncias AP. As demais 9 soluções ótimas das instâncias AP foram encontradas executando apenas mais uma iteração. Assim, apesar da maiorias das instâncias necessitar apenas de uma iteração, todos os tempos da heurística proposta apresentados neste trabalho estão associados a duas iterações.

4.3. Comparação com a literatura

As Tabelas 1 e 2 apresentam para respectivamente instâncias TR e AP os tempos computacionais em segundos obtidos pela heurística proposta considerando duas iterações (Este trab.), pelo melhor tempo de algum método exato encontrado na literatura (Exato) e pela heurística proposta por Ghaffarinasab *et al* (2018) (Heur. Lit.). Os tempos da heurística da literatura não estão presentes na Tabela 2 pois as instâncias AP não foram testadas por este método. Por falta de espaço, a Tabela 2 apresenta a média dos tempos ao invés do tempo de cada instância.

Cada tempo presente na coluna Exato foi obtido na mesma máquina da heurística proposta e representa para uma dada instância o melhor tempo entre os métodos exatos encontrados na literatura propostos em Mahmutogullari e Kara (2016) e em Araujo *et al* (2019). Já os resultados obtidos por Ghaffarinasab *et al* (2018), foram obtidos em um computador com Intel Core i3-3220 com 3.30 GHz de CPU e 16 GB de ram. Para superar as diferenças entre os processadores, foram obtidos os *scores* para uma única *thread* dos processadores Passmark (2019) e calculado a razão entre eles, que é de aproximadamente 1,3. Assim, todos os tempos obtidos apresentados em Ghaffarinasab *et al* (2018) foram divididos por este número.

Observando as Tabelas 1 e 2, nota-se que que a heurística proposta mostrou-se significativamente mais rápida em todas as instâncias testadas.

Tabela 1: Resultados Comparativos para as instâncias TR

p	r	α =0,6 Tempo(s) Este trab.	Exato	Heur. Lit.	α =0,8 Tempo(s) Este trab.	Exato	Heur. Lit.	α =0,9 Tempo(s) Este trab.	Exato	Heur. Lit.
6	6	14,33	152,73	1627,42	19,72	109,36	1623,92	10,63	47,25	1641,60
6	8	5,95	129,72	1815,28	5,16	98,53	1759,80	10,25	56,92	1915,48
6	10	9,09	127,66	2208,96	7,47	90,78	2231,65	4,86	71,41	2117,23
6	12	7,61	154,91	2380,21	5,08	104,14	2255,35	3,03	84,11	2379,24
6	14	10,19	175,08	2538,99	5,32	131,27	1707,01	6,45	94,92	2552,99
8	6	16,61	177,73	1919,29	15,31	96,67	1799,81	10,78	70,52	1922,32
8	8	9,78	224,88	2269,32	7,28	98,72	2314,01	9,84	93,52	2212,65
8	10	6,84	130,88	2477,90	5,56	108,30	2481,08	7,22	89,53	2568,47
8	12	9,11	167,16	3038,98	9,48	148,98	2860,55	5,70	107,92	2860,55
8	14	8,19	193,25	3378,12	5,63	161,92	3217,32	4,36	173,83	3378,19
10	6	6,27	100,59	2064,46	5,47	69,05	2076,23	15,16	79,81	1993,10
10	8	5,56	115,53	2287,70	7,00	86,17	2262,07	15,11	94,19	2310,85
10	10	4,73	136,69	2622,55	11,83	134,67	2706,99	15,28	125,95	2755,33
10	12	14,80	159,47	3042,26	18,64	195,41	3093,38	8,23	198,86	3120,68
10	14	11,53	184,30	3451,84	13,38	185,47	3482,85	6,70	226,05	3601,18
12	6	15,38	68,67	2092,73	14,92	73,72	2116,52	13,39	61,66	2092,28
12	8	15,03	96,77	2587,68	15,22	113,11	2688,69	16,22	107,34	2605,48
12	10	20,45	157,34	2992,52	25,34	206,73	2912,76	16,95	156,70	2931,23
12	12	16,63	151,63	3323,02	15,22	236,31	3373,35	14,17	200,70	3269,78
12	14	15,38	201,64	3826,39	20,83	223,63	3853,46	11,59	187,48	3824,22
14	6	18,06	76,98	2701,46	15,09	46,83	2630,63	20,45	42,28	2650,59
14	8	17,91	114,66	3000,96	23,73	101,25	3057,70	22,48	69,91	3045,57
14	10	20,20	151,50	3429,34	27,48	169,13	3530,96	16,89	112,88	3547,22
14	12	16,91	170,97	3827,45	23,23	157,50	3847,55	15,50	110,98	3837,05
14	14	18,95	154,83	4400,95	19,91	151,61	4453,55	13,84	114,89	4314,27
Média		12,62	147,02	2772,23	13,73	131,97	2733,49	11,80	111,18	2777,90

Tabela 2: Resultados Comparativos para as instâncias AP

	Tempo médio(s) α = 0,6	α = 0,8	α = 0,9
Este trab.	291,65	238,30	148,95
Exato	17716,07	12238,01	13633,50

5. CONCLUSÕES

Este trabalho propôs uma heurística para o (r/p)HC. Esta heurística é composta basicamente de duas etapas em cada iteração: uma etapa de geração de uma solução e uma etapa de melhoria. A etapa de geração é constituída da execução de modelos PLIM que considera que se a líder não localizar um par de hubs suficientemente barato em relação a um par O/D então este par não será servido pela líder. Já a etapa de melhoria é constituída de uma busca local simples onde é verificada se existe melhoria fazendo trocas 2 a 2 entre hubs pertencentes a solução e hubs fora desta. Esta última etapa possui ainda uma etapa interna de verificação que é capaz de descartar diversas trocas de que se tenha certeza que não levam a melhorias.

Os tempos computacionais obtidos pela heurística foram comparados aos obtidos pelos métodos exatos e pela heurística encontrados na literatura. Resultados mostraram que a heurística proposta foi significativamente mais rápida em todas as instâncias comparadas.

Algumas pesquisas futuras podem ser exploradas a partir deste trabalho: a adaptação da heurística proposta para versão de alocação simples do problema e/ou para outros problemas de localização competitiva bem como o teste da heurística proposta em novas instâncias.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alumur, S. e B. Y. Kara (2008). Network hub location problems: The state of the art. *European journal of operational research*, 190(1), 1-21.

Araujo, A. C. A.; M. C. Roboredo; A. A. Pessoa e V. Pereira (2019). Exact methods for the discrete multiple allocation (r|p) hub-centroid problem. Technical Report L-2019-1, *Cadernos do LOGIS-UFF*, Niteroi, Brazil.

Button, K. (2002). Debunking some common myths about airport hubs. *Journal of air transport management*, *8*(3), 177-188.

Campbell, J. F. e M. E. O'Kelly (2012). Twenty-five years of hub location research. *Transportation Science*, *46*(2), 153-169.

Ernst, A. T. e M. Krishnamoorthy (1996). Efficient algorithms for the uncapacitated single allocation p-hub median problem. *Location science*, *4*(3), 139-154.

Farahani, R. Z.; M. Hekmatfar; A. B. Arabani e E. Nikbakhsh (2013). Hub location problems: A review of models, classification, solution techniques, and applications. *Computers & Industrial Engineering*, *64*(4), 1096-1109.

Ghaffarinasab, N.; A. Motallebzadeh; Y. Motallebzadeh e B. Y. Kara (2018). Efficient simulated annealing based solution approaches to the competitive single and multiple allocation hub location problems. *Computers & Operations Research*, *90*, 173-192.

Ishfaq, R. e C. R. Sox (2011). Hub location–allocation in intermodal logistic networks. *European Journal of Operational Research*, *210*(2), 213-230.

Kim, H. e M. E. O'Kelly (2009). Reliable p-hub location problems in telecommunication networks. *Geographical Analysis*, *41*(3), 283-306.

Mahmutogullari, A. I. e B. Y. Kara (2016). Hub location under competition. *European Journal of Operational Research*, *250*(1), 214-225.

Passmark (2019). Web page. https://www.cpubenchmark.net. Accessado: 2019-03-06

Tan, P. Z. B. Y. Kara (2007). A hub covering model for cargo delivery systems. *Networks: An International Journal*, *49*(1), 28-39.

Marcos Roboredo (mcroboredo@id.uff.br)
Helder Gomes Costa (heldergc@id.uff.br)
Departamento de Engenharia de Produção, Escola de Engenharia, Universidade Federal Fluminense
Rua Passo da Patria, 156, BL D, 306, – Niterói, RJ, Brasil